



Support de cours

Equations différentielles linéaires d'ordre 2



Séverine MOUCHEL
TC3 – 2026/2027
Harmonisation Maths



ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Les **équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants** constituent le type d'équations le plus fréquemment rencontré en **physique** (oscillations, circuits électriques, mécanique, vibrations, etc.).

Elles sont de la forme :

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = f(x)$$

avec :

- $a, b, c \in \mathbb{R}$ des **constantes** ($a \neq 0$)
- $y(x)$ la fonction inconnue
- $f(x)$ le second membre



ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU SECOND ORDRE À COEFFICIENTS CONSTANTS

1. Équation homogène:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

Le second membre est nul.

2. Équation avec second membre constant:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = K$$

où K est une constante réelle.

3. Équation avec second membre quelconque:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = g(x)$$

où $g(x)$ est une fonction connue.



EQUATION HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS

On considère l'équation différentielle homogène :

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

ou, sous forme simplifiée,

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (1)$$

avec $a \neq 0$.

1. Équation caractéristique

On recherche une solution sous la forme : $y = e^{rx}$

En remplaçant dans l'équation (1), on obtient **l'équation caractéristique** :

$$ar^2 + br + c = 0$$



EQUATION HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS

2. Calcul des racines

Le discriminant est: $\Delta = b^2 - 4ac$

Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

3. Trois cas sont possibles

Cas 1 : $\Delta > 0 \rightarrow$ deux racines réelles distinctes

Cas 2 : $\Delta = 0 \rightarrow$ une racine réelle double

Cas 3 : $\Delta < 0 \rightarrow$ deux racines complexes conjuguées



EQUATION HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Cas 1 : Deux racines réelles distinctes ($\Delta > 0$)

Lorsque le discriminant est strictement positif ($\Delta = b^2 - 4ac > 0$), l'équation caractéristique admet **deux racines réelles distinctes r_1 et r_2** .

La solution générale de l'équation différentielle homogène $ay'' + by' + cy = 0$ est alors :

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$$

où :

- λ et μ sont deux constantes d'intégration déterminées à l'aide des conditions initiales
- r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique



EQUATION HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS - EXEMPLE

On considère l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 3y = 0$$

1. Équation caractéristique

On associe à cette équation différentielle l'équation caractéristique : $r^2 - 4r + 3 = 0$

Le discriminant vaut : $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 3$

$$\boxed{\Delta = 16 - 12 = 4}$$

Comme :

$$\Delta > 0$$

l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes.



EQUATION HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS - EXEMPLE

2. Calcul des racines

$$r_1 = \frac{4 - \sqrt{4}}{2} = 1$$
$$r_2 = \frac{4 + \sqrt{4}}{2} = 3$$

Donc :

$$\boxed{r_1 = 1 \quad r_2 = 3}$$

3. Solution générale

Comme les deux racines sont réelles et distinctes, la solution de l'équation différentielle homogène est :

$$\boxed{y(x) = \lambda e^x + \mu e^{3x}}$$

où :

- λ et μ sont deux constantes d'intégration déterminées par les conditions initiales.



EQUATION HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Interprétation physique

Ce cas correspond à un **régime apériodique** :

- en **mécanique**, il décrit un mouvement fortement amorti qui revient vers sa position d'équilibre **sans oscillation**
- en **électricité**, il correspond à la réponse apériodique d'un circuit RLC fortement amorti

À retenir :

Lorsque $\Delta > 0$, la solution est la somme de deux exponentielles réelles et il n'y a **aucune oscillation**.



EQUATION HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Cas 2 : Racine réelle double ($\Delta = 0$)

Lorsque le discriminant est nul ($\Delta = b^2 - 4ac = 0$), l'équation caractéristique possède une **racine réelle double** :

$$r = -\frac{b}{2a}.$$

La solution générale de l'équation différentielle homogène

$$ay'' + by' + cy = 0$$

est alors :

$$\boxed{y(x) = (\lambda x + \mu)e^{rx}}$$

où :

- λ et μ sont deux constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales
- r est la racine double de l'équation caractéristique



EQUATION HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS - EXEMPLE

On considère l'équation différentielle :

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

1. Équation caractéristique

L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

Le discriminant vaut :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4$$

$$\boxed{\Delta = 16 - 16 = 0}$$

Comme :

$$\Delta = 0$$

l'équation caractéristique possède une **racine réelle double**.



EQUATION HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS - EXEMPLE

2. Calcul de la racine double

$$r = \frac{-b}{2a}$$

soit :

$$r = \frac{4}{2} = 2$$

Donc :

$$\boxed{r_1 = r_2 = r = 2}$$

3. Solution générale

Lorsque la racine est double, la solution de l'équation différentielle homogène est :

$$\boxed{y(x) = (\lambda x + \mu)e^{2x}}$$

où :

- λ et μ sont deux constantes d'intégration déterminées à partir des conditions initiales.



EQUATION HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Interprétation physique:

Ce cas correspond au **régime critique** (ou **amortissement critique**):

- en **mécanique**, le système revient vers sa position d'équilibre **le plus rapidement possible, sans osciller**.
- en **électricité**, il correspond à la réponse critique d'un circuit RLC, située à la limite entre le régime apériodique et le régime pseudo-périodique.

À retenir :

Lorsque $\Delta = 0$, la solution comporte un facteur supplémentaire x , caractéristique d'une racine double, et le système ne présente **aucune oscillation**.



EQUATION HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Cas 3 : Deux racines complexes conjuguées ($\Delta < 0$)

Lorsque le discriminant est négatif ($\Delta = b^2 - 4ac < 0$), l'équation caractéristique possède deux racines **complexes conjuguées** :

$$r_1 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}j$$
$$r_2 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}j$$

On pose alors :

$$r_1 = \alpha + j\beta \text{ et } r_2 = \alpha - j\beta$$

avec :

$$\alpha = -\frac{b}{2a}$$

et

$$\beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

EQUATION HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS

La solution générale de l'équation différentielle homogène $ay'' + by' + cy = 0$ s'écrit :

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$$

soit :

$$y(x) = \lambda e^{(\alpha + j\beta)x} + \mu e^{(\alpha - j\beta)x}$$

On factorise par $e^{\alpha x}$:

$$y(x) = e^{\alpha x} (\lambda e^{j\beta x} + \mu e^{-j\beta x})$$

Passage à une forme réelle:

En utilisant la formule d'Euler : $e^{j\beta x} = \cos(\beta x) + j\sin(\beta x)$

on obtient une solution réelle de la forme : $y(x) = e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x))$

où A et B sont deux constantes d'intégration.



EQUATION HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS - EXEMPLE

On considère l'équation différentielle :

$$y'' + y' + 2y = 0$$

1. Équation caractéristique

L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 + r + 2 = 0$$

Le discriminant vaut :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 2$$

$$\boxed{\Delta = 1 - 8 = -7}$$

Comme :

$$\Delta < 0$$

l'équation caractéristique possède deux racines **complexes conjuguées**.

On peut écrire :

$$\Delta = -7 = 7j^2$$



EQUATION HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS - EXEMPLE

2. Calcul des racines

$$r_1 = \frac{-1 + \sqrt{-7}}{2}$$

$$r_2 = \frac{-1 - \sqrt{-7}}{2}$$

Comme :

$$\sqrt{-7} = j\sqrt{7}$$

on obtient :

$$r_1 = -\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{7}}{2}$$

$$r_2 = -\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{7}}{2}$$

On identifie alors :

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

EQUATION HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS - EXEMPLE

3. Solution générale sous forme complexe

La solution de l'équation différentielle homogène est : $y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x}$

soit :
$$y(x) = \lambda e^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{7}}{2}\right)x} + \mu e^{\left(-\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{7}}{2}\right)x}$$

On factorise par : $e^{-\frac{1}{2}x}$

d'où :

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(\lambda e^{j\frac{\sqrt{7}}{2}x} + \mu e^{-j\frac{\sqrt{7}}{2}x} \right)$$

la solution réelle s'écrit :

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) \right)$$

où A et B sont deux constantes d'intégration.



EQUATION HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Interprétation physique:

Ce cas correspond au **régime pseudo-périodique** (ou régime oscillatoire amorti).

- En **mécanique** : le système oscille autour de sa position d'équilibre avec une amplitude qui diminue progressivement.
- En **électricité** : un circuit RLC présente des oscillations amorties avant de revenir à l'équilibre.

À retenir :

Lorsque $\Delta < 0$, la solution est une oscillation sinusoïdale multipliée par une exponentielle décroissante (si $\alpha < 0$). Le système oscille tout en étant amorti



EQUATION HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS

Démonstration du passage à la forme réelle:

La solution générale s'écrit : $y(x) = \lambda e^{(\alpha+j\beta)x} + \mu e^{(\alpha-j\beta)x}$

On sépare les termes : $y(x) = \lambda e^{\alpha x} e^{j\beta x} + \mu e^{\alpha x} e^{-j\beta x}$

On factorise par $e^{\alpha x}$: $y(x) = e^{\alpha x} (\lambda e^{j\beta x} + \mu e^{-j\beta x})$

On utilise les relations :

$$e^{j\beta x} = \cos(\beta x) + j\sin(\beta x)$$

$$e^{-j\beta x} = \cos(\beta x) - j\sin(\beta x)$$



EQUATION HOMOGÈNE À COEFFICIENTS CONSTANTS

En remplaçant :

$$y(x) = e^{\alpha x} [\lambda (\cos(\beta x) + j \sin(\beta x)) + \mu (\cos(\beta x) - j \sin(\beta x))]$$

On regroupe les termes en $\cos(\beta x)$ et $\sin(\beta x)$:

$$y(x) = e^{\alpha x} [(\lambda + \mu) \cos(\beta x) + j(\lambda - \mu) \sin(\beta x)]$$

Les constantes complexes peuvent être remplacées par deux constantes réelles K et K' .

On obtient alors la forme réelle de la solution :

$$y(x) = e^{\alpha x} (K \cos(\beta x) + K' \sin(\beta x))$$

avec :

- K et K' : constantes d'intégration déterminées par les conditions initiales ;
- α : coefficient d'amortissement ;
- β : pulsation des oscillations.



ÉQUATION AVEC SECOND MEMBRE CONSTANT

On considère l'équation : $a \frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = d$ avec a, b, c et d des constantes réelles.

Méthode 1 : Transformation en équation sans second membre

On effectue le changement de variable : $u = cy - d$

d'où : $u' = cy'$ et $u'' = cy''$

En remplaçant dans l'équation : $a \frac{u''}{c} + b \frac{u'}{c} + u = 0$

soit :

$$au'' + bu' + cu = 0$$

On retrouve alors une **équation homogène à coefficients constants**, résolue avec l'équation caractéristique :

$$ar^2 + br + c = 0$$



ÉQUATION AVEC SECOND MEMBRE CONSTANT

Méthode 2 : Principe de superposition

La solution générale d'une équation avec second membre est la somme de deux termes :

$$\text{Solution générale} = \text{Solution de l'équation sans second membre} + \text{Solution particulière}$$

soit :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

avec :

• $y_h(x)$: solution de l'équation homogène : $ay'' + by' + cy = 0$

$y_p(x)$: solution particulière liée au second membre $\Rightarrow y_p = \frac{d}{c}$

La solution générale est :

$$y(x) = y_h(x) + \frac{d}{c}$$



ÉQUATION AVEC SECOND MEMBRE CONSTANT

On considère :

$$y'' + 4y' - 5y = 10$$

1^{ère} méthode:

On pose $-5y - 10 = u$.

$$\text{Soit: } y' = -\frac{1}{5}u' \text{ et } y'' = -\frac{1}{5}u''$$

On se ramène ainsi à une équation sans second membre : $u'' + 4u' - 5u = 0$ (1)

$$\text{Donc: } \Delta = 36 \Rightarrow r_1 = -5 \text{ et } r_2 = 1$$

La solution de l'équation différentielle sans 2nd membre est donc: $u(x) = \lambda \cdot e^{-5x} + \mu \cdot e^x$

$$\Rightarrow y(x) = \alpha e^{-5x} + \beta e^x - 2$$



ÉQUATION AVEC SECOND MEMBRE CONSTANT

2^{ème} méthode:

Solution sans 2nd membre: $y'' + 4y' - 5y = 0 \Rightarrow y(x) = \lambda \cdot e^{-5x} + \mu \cdot e^x$

Solution particulière avec 2nd membre ($y = \frac{d}{c}$) $\Rightarrow y(x) = -2$

On retrouve bien:

$$y(x) = \alpha e^{-5x} + \beta e^x - 2$$



ÉQUATION AVEC SECOND MEMBRE QUELCONQUE

On considère l'équation :

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = d(x)$$

avec :

- a, b, c des constantes réelles ;
- $d(x)$ une fonction connue appelée **second membre**.

Principe de résolution : superposition des solutions

La solution générale de l'équation avec second membre est la somme de deux solutions :

$$\text{Solution générale} = \text{Solution sans second membre} + \text{Solution particulière}$$

soit :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

ÉQUATION AVEC SECOND MEMBRE QUELCONQUE

On recherche ensuite une solution $y_p(x)$ vérifiant : $ay_p'' + by_p' + cy_p = d(x)$

La forme de y_p dépend de la nature de $d(x)$:

$d(x)$	y_0 : solution particulière
Polynôme de degré n	• Polynôme de degré n si $c \neq 0$ • Polynôme de degré $n+1$ si $c=0$ et $b \neq 0$ • Polynôme de degré $n+2$ si $c=0$ et $b=0$
$d(x)=k_1 \cos \omega x + k_2 \sin \omega x$	• $y_0(x)=C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$ si $i\omega$ n'est pas solution de l'équation caractéristique, • $y_0(x)=x(C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x)$ si $i\omega$ est solution de l'équation caractéristique.
$d(x)=e^{\gamma x} P(x)$, où P est un polynôme de degré n et γ un nombre réel ou complexe	$y_0(x)=e^{\gamma x} Q(x)$, où Q est un polynôme • de degré n si γ n'est pas solution de l'équation caractéristique, • de degré $n+1$ si γ est une solution simple de l'équation caractéristique, • de degré $n+2$ si γ est une solution double de l'équation caractéristique.



ÉQUATION AVEC SECOND MEMBRE QUELCONQUE - EXEMPLES

Exemples:

$$1) \ y'' - 2y' + y = x ; \ y(0) = y'(0) = 0$$

$$2) \ y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^{-x}$$

$$3) \ y'' - 4y' + 3y = (2x + 1)e^x$$