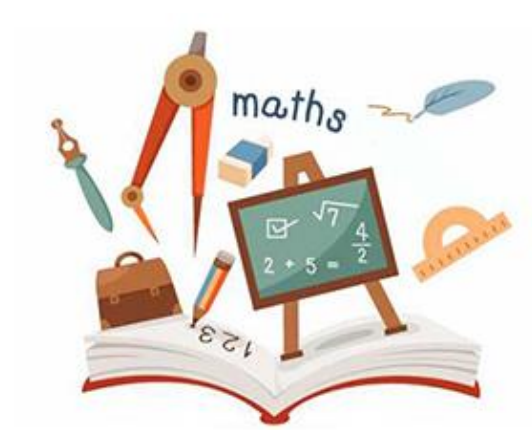


CENTRE DE FORMATION "LES ELITES DU BENIN"
(CFEB)



Résumé de cours de Maths (Troisième)

EDITION 2023

Un document pour faciliter les révisions aux
apprenants...

KPADONOU MANU JOSE HOREB
TEL : 67255764

KPADONOU MANU JOSE HOREB

Sous la supervision de

M. Wilfried HOUNDJEGBE

Professeur de mathématiques

et de

M. Nicolas SOVIDE

Professeur Certifié de mathématiques

Rappel de quelques notions

I. Quotient

1.1. Règles et Formules

Soient a, b, c et d des nombres différents de zéro

- $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$
- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d + b \times c}{b \times d}$ (Réduire au même dénominateur)
- $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$
- $\frac{a}{b} \times c = \frac{a \times c}{b}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$
- $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{b \times c}$
- $\frac{a}{\frac{c}{d}} = a \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{c}$

1.2. Formules pour déterminer un inconnu : Principe de proportionnalité

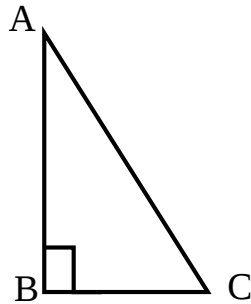
Soient a, b, c et d des nombres différents non nuls.

- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $a \times d = b \times c$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $a = \frac{b \times c}{d}$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $b = \frac{a \times d}{c}$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $c = \frac{a \times d}{b}$
- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ équivaut à $d = \frac{b \times c}{a}$

II. Propriété de Pythagore

2.1. Enoncé de la propriété de Pythagore

Soit ABC un triangle rectangle en B . D'après la propriété de Pythagore on a :



$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

2.2. Réciproque de la propriété de Pythagore

Soit ABC un triangle tel que $AB < AC$ et $BC < AC$.

Si $AC^2 = AB^2 + BC^2$ alors d'après la réciproque de la propriété de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B .

SA₁ : LES TRIANGLES

III. Nombres Réels

3.1. Racine carré et définition

Soient a et b deux nombres réels positifs.

- $\sqrt{a} \geq 0$ et $(\sqrt{a})^2 = a$
- $\sqrt{a} = b$ équivaut à $a = b^2$
- $\sqrt{0} = 0$ et $\sqrt{1} = 1$.

3.2. Somme, Produit, Quotient et Racine Carrée.

Soient a et b deux nombres réels positifs avec $b \neq 0$.

- $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a + b}$
- $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

3.3. Racines carrées et Puissances

Soient a un nombre réel non nul et n un entier non nul.

- $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs égaux à } a}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ équivaut à $a^n \times a^{-n} = 1$
- $a^0 = 1$ et $a^1 = a$
- $\sqrt{a^{2n}} = a^n$ et $\sqrt{a^{2n+1}} = a^n \sqrt{a}$ avec $a \geq 0$

3.4. Autres Formules

Soient a et b deux nombres réels non nuls et soient m et n deux entiers relatifs.

- $a^n \times b^n = (a \times b)^n$
- $a^n \times a^m = a^{n+m}$
- $(a^n)^m = a^{n \times m}$
- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Soient p et q deux nombres rationnels et a et b deux nombres réels positifs non nuls.

- $p\sqrt{a} + q\sqrt{a} = (p + q)\sqrt{a}$

3.5. Ecriture de quotient sans radical au dénominateur.

Pour écrire un quotient sans radical au dénominateur ou pour rendre rationnel le dénominateur d'un quotient, on multiplie les termes du quotient (numérateur et dénominateur) par l'expression conjuguée du dénominateur. On développe puis on réduit si possible.

Exemple :

Soient a et b deux nombres réels positifs non nuls.

- $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1 \times \sqrt{a}}{\sqrt{a} \times \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{a}}{a}$
- $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1 \times (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$

3.6. Comparaison de deux nombres réels ;

Soient a, b, x et y des nombres réels positifs non nuls.

- Si $a < x$ et $b < y$ alors $a + b < x + y$
- Si $a < x$ et $b < y$ alors $ab < xy$
- $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$
- $a < b$ équivaut à $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Soient a et b des **nombre**s réels **né**gatifs non nuls.

- $a < b$ équivaut à $a^2 > b^2$
- $a < b$ équivaut à $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
- Si $a < 0 < b$ alors $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

3.7. Etude de signe

Soient a et b deux nombre

s réels non nuls, on a :

- $a < b$ équivaut à $a - b < 0$
- $a < b$ équivaut à $b - a > 0$

IV. Valeur absolue

4.1. Distance de deux nombres

a et b sont deux nombre

s réels, on a :

- $d(a, b) = |a - b|$
- $d(a, b) \geq 0$
- $d(a, b) = d(b, a)$
- Si $a \geq b$ alors $d(a, b) = a - b$
- Si $a \leq b$ alors $d(a, b) = b - a$

4.2. Valeur absolue d'un nombre réel

4.2.1. Définition

On appelle valeur absolue d'un nombre réel a , notée $|a|$ la distance entre a et 0.

On a : $|a| = d(a, 0)$.

4.2.2. Propriétés

Soit a un nombre réel.

- $|a|$ est un nombre réel toujours **positif**
- $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a > 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$
- $|-a| = |a|$ et $\sqrt{a^2} = |a|$.

V. Intervalles

5.1. Définition et Notation

a et b étant des nombres réels avec $a < b$. On a :

- Les nombres a et b sont les bornes de chacun des intervalles suivants : $[a; b]$; $[a; b[$; $]a; b]$; $]a; b[$.
- La distance de a à b est appelée **amplitude** de ces intervalles.

5.2. Tableau récapitulatif

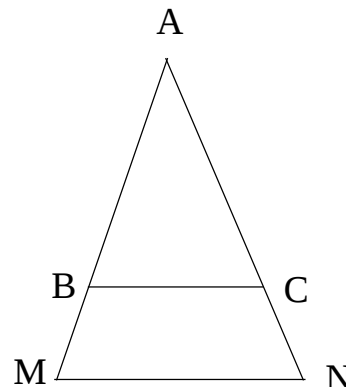
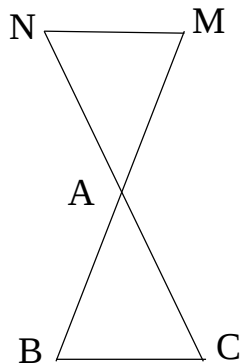
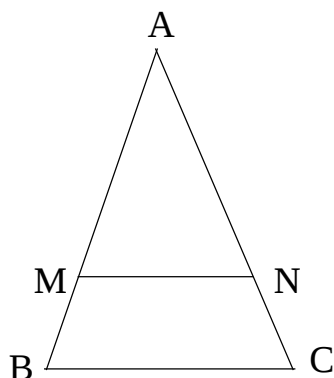
Ecriture	Lecture	Ensemble des x tels que	Représentation
$[a; b]$	Intervalle fermé a, b	$a \leq x \leq b$	
$[a; b[$	Intervalle a, b fermé en a , ouvert en b	$a \leq x < b$	
$]a; b]$	Intervalle a, b ouvert en a , fermé en b	$a < x \leq b$	
$]a; b[$	Intervalle ouvert a, b	$a < x < b$	
$]←; b[$	Intervalle des nombres plus petits que b	$x < b$	
$]←; b]$	Intervalle des nombres inférieurs ou égaux à b	$x \leq b$	
$]a; →[$	Intervalle des nombres plus grands que a	$x > a$	
$[a; →[$	Intervalle des nombres supérieurs ou égaux à a	$x \geq a$	

VI. Propriété de Thalès relative aux triangles

6.1. Cas de figures possibles

On considère un triangle ABC .

Soient $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$ tels que $(MN) \parallel (BC)$.



6.2. Enoncé de la propriété de Thalès

ABC est un triangle. Si $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$ tels que $(MN) \parallel (BC)$, alors d'après la propriété de Thalès on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

6.3. Conséquence de la propriété de Thalès.

ABC est un triangle. Si $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$ tels que $(MN) \parallel (BC)$ alors on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

6.4. Réciproque de la propriété de Thalès.

Si ABC est un triangle, $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$ tels que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors on a : $(MN) \parallel (BC)$.

VII. Trigonométrie

7.1. Rapport trigonométrique dans un triangle rectangle.

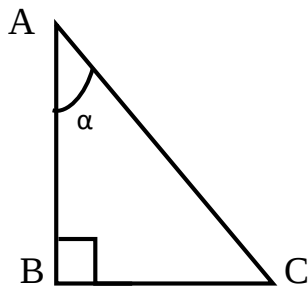
- $\sin \alpha = \frac{\text{Longueur du Côté Opposé}}{\text{Longueur de l'hypoténuse}}$

- $\cos \alpha = \frac{\text{Longueur du Côté Adjacent}}{\text{Longueur de l'hypoténuse}}$

- $\tan \alpha = \frac{\text{Longueur du Côté Opposé}}{\text{Longueur du Côté Adjacent}}$
- $\cotan \alpha = \frac{\text{Longueur du Côté Adjacent}}{\text{Longueur du Côté Opposé}}$

NB : Il faut connaître l'expression : **SOH – CAH – TOA – CAO** pour mieux appliquer les rapports trigonométriques.

Exemple :



- $\sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{AC}$
- $\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC}$
- $\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB}$
- $\cotan \widehat{BAC} = \frac{AB}{BC}$

7.2. Autres propriétés.

Pour tout angle α de mesure inférieure ou égale à 90° on a :

- $0 \leq \cos \alpha \leq 1$ et $0 \leq \sin \alpha \leq 1$
- $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$
- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \text{ (} \cos \alpha \neq 0 \text{)}$
- $\cotan \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \text{ (} \sin \alpha \neq 0 \text{)}$

7.3. Rapport trigonométrique de quelques angles remarquables.

α (en degré)	0	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Indéfini
$\cotan \alpha$	Indéfini	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

VIII. Triangles semblables

8.1. Propriétés

- Si deux triangles ont leurs côtés de longueurs deux à deux proportionnelles alors ils sont semblables.
- Si deux triangles ont leurs angles deux à deux de mêmes mesures alors ils sont semblables.
- Si deux triangles sont tels que deux côtés de l'un ont des longueurs proportionnelles à celles de deux côtés de l'autre et que les angles formés par ces côtés ont la même mesure alors ces triangles sont semblables.

8.2. Eléments homologues

Dans deux triangles semblables :

- Deux côtés de longueurs proportionnelles sont dits "côtés homologues" ;
- Deux angles de même mesure sont dits "angles homologues" ;
- Deux sommets de deux angles ayant la même mesure sont dits "sommets homologues".

8.3. Rapport de similitude

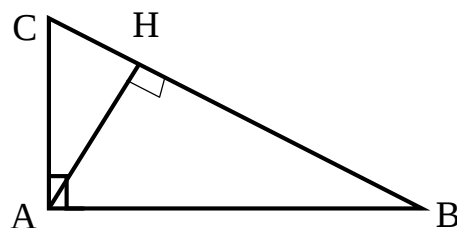
Si A, B et C sont respectivement les sommets homologues de M, N et O, alors le rapport de similitude k du triangle ABC au triangle MNO est :

$$k = \frac{MN}{AB} \text{ ou } k = \frac{MO}{AC} \text{ ou } k = \frac{NO}{BC}$$

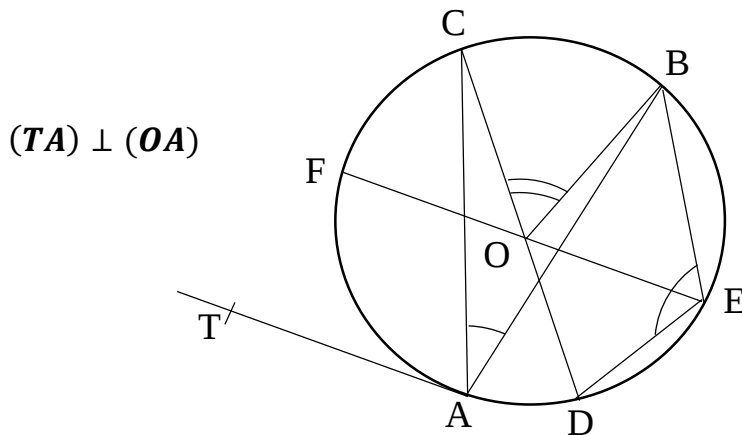
IX. Relations métriques dans un triangle.

ABC est un triangle rectangle en A . H est le projeté orthogonal de A sur (BC) . D'après les relations métriques on a :

- $AH \times BC = AB \times AC$
- $AH^2 = HB \times HC$
- $AB^2 = BH \times BC$
- $AC^2 = CH \times CB$



X. Angles et cercles.



10.1. Définition d'angle inscrit et d'angle au centre dans un cercle

- Un angle est dit inscrit dans un cercle lorsqu'il a son sommet sur le cercle et ses deux côtés qui recouperont le cercle ou qu'un de ses côtés recoupe le cercle et le second côté est tangent au cercle.

Exemple : $\widehat{BAC}$; $\widehat{ADC}$ et $\widehat{TAC}$

- Un angle au centre est un angle dont le sommet est le centre du cercle.

Exemple : $\widehat{BOC}$; $\widehat{COD}$

10.2. Relations entre les angles inscrit et au centre.

- Un angle aigu inscrit dans un cercle a pour mesure la moitié de la mesure de l'angle au centre qui lui est associé.

$$\text{mes } \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{BOC}$$

A noter : Un angle au centre est associé à un angle inscrit lorsqu'ils interceptent le même arc.

- Pour un angle obtus inscrit dans un cercle :

$$\text{mes } \widehat{BED} = \frac{1}{2} (\text{mes } \widehat{BOF} + \text{mes } \widehat{FOD})$$

$$\text{mes } \widehat{BED} = 180^\circ - \frac{1}{2} \text{mes } \widehat{BOD}$$

10.3. Autres propriétés

- Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure.
- Dans un cercle, deux angles inscrits qui interceptent deux arcs de même longueur ont la même mesure.

Exemple : $\text{mes } \widehat{BAC} = \text{mes } \widehat{BDC}$

- Tout angle inscrit dont les côtés passent par les extrémités d'un même diamètre du cercle est un angle droit.

Exemple : $\text{mes } \widehat{CAD} = 90^\circ$

10.4. Angles inscrits et Polygones réguliers

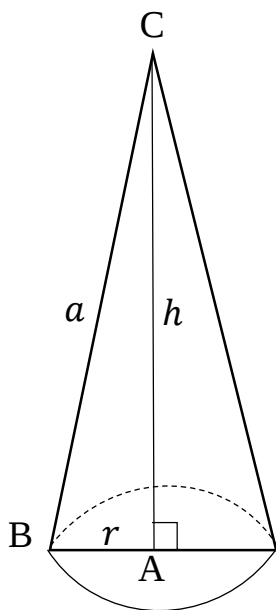
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 ($n \geq 3$).

- La mesure d'un angle au centre d'un **polygone régulier à n côtés** est $\frac{360^\circ}{n}$.
- La mesure de l'angle au sommet d'un **polygone régulier à n côtés** est : $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$.

SA₂ : CONFIGURATIONS DE L'ESPACE

I. Cône de révolution

1.1. Relation entre l'apothème, le rayon et la hauteur.



a : Apothème

r : Rayon

h : Hauteur

Ab : Aire de base

Al : Aire latérale

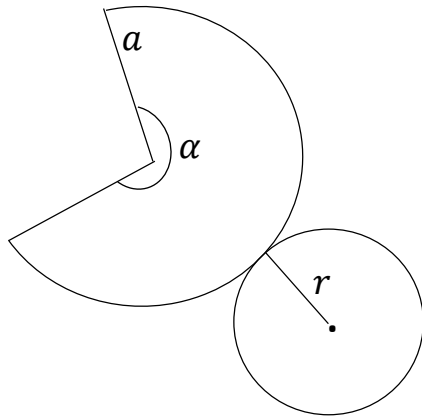
At : Aire totale

Pb : Périmètre de base

V : Volume

- $a^2 = h^2 + r^2$
- $Ab = \pi r^2$
- $Al = \pi r a$
- $At = Ab + Al = \pi r(r + a)$
- $Pb = 2\pi r$
- $V = \frac{\pi r^2 \times h}{3}$

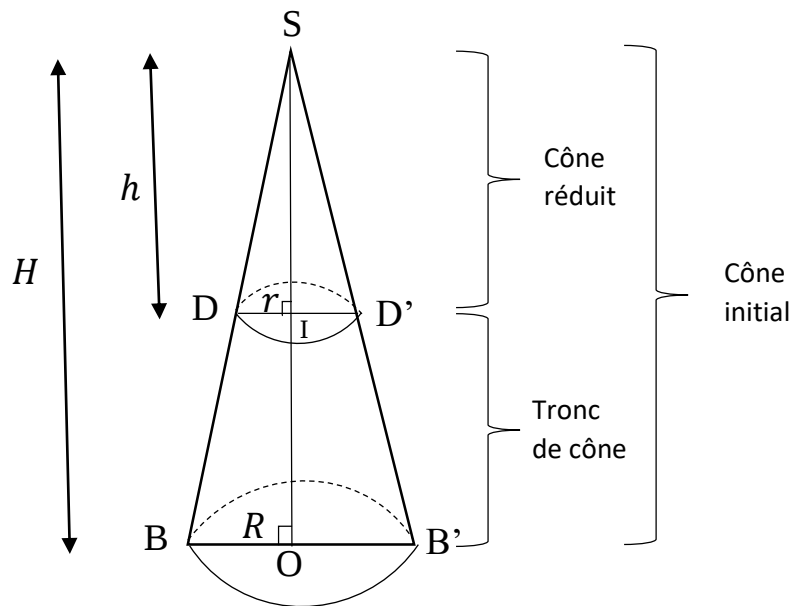
1.2. Réalisation d'un patron de cône



$$\alpha = \frac{360^\circ \times r}{a}$$

1.3. Section plane d'un cône de révolution

1.3.1. Détermination de l'échelle de réduction k



Considérons le triangle SOB rectangle en O . $I \in [SO]$ et $D \in [SB]$ tel que $(ID) \parallel (OB)$.

D'après la conséquence de la propriété de Thalès, on a : $\frac{SI}{SO} = \frac{SD}{SB} = \frac{ID}{OB}$

Or $SI = h$, $SD = a'$, $ID = r$, $SO = H$, $SB = a$ et $OB = R$;

donc

$$k = \frac{h}{H} \text{ ou } k = \frac{a'}{a} \text{ ou } k = \frac{r}{R}$$

$$k^2 = \frac{\text{Aire du c\^one r\^eduit}}{\text{Aire correspondante du c\^one initial}}$$

$$k^3 = \frac{\text{Volume du c\^one r\^eduit}}{\text{Volume du c\^one initial}}$$

1.3.2. Tronc de c\^one

- Hauteur h_T du tronc de c\^one

$$H = h + h_T \text{ soit } h_T = H - h. \text{ Or } k = \frac{h}{H} \text{ soit } h = kH.$$

$$\text{Alors } h_T = H - kH \text{ ainsi}$$

$$h_T = (1 - k)H$$

- Aire lat\^erale Al_T du tronc de c\^one

$$Al = Al' + Al_T \text{ soit } Al_T = Al - Al'.$$

$$\text{Or } k^2 = \frac{Al'}{Al} \text{ soit } Al' = k^2 Al \text{ donc } Al_T = Al - k^2 Al$$

$$Al_T = (1 - k^2)Al$$

- Volume V_T du tronc

$$V = V' + V_T \text{ soit } V_T = V - V'.$$

$$\text{Or } k^3 = \frac{V'}{V} \text{ soit } V' = k^3 V. \text{ Donc } V_T = V - k^3 V$$

$$V_T = (1 - k^3)V$$

1.3.3. Calcul du volume du tronc de cône

$$\begin{aligned}V_T &= (1 - k^3) V \\&= (1 - k^3) \frac{\pi R^2 H}{3} \\&= \frac{\pi}{3} (1 - k^3) R^2 H \\&= \frac{\pi}{3} (1 - k) (1 + k + k^2) R^2 H \\&= \frac{\pi}{3} h_T (1 + k + k^2) R^2 \\&= \frac{\pi}{3} h_T (R^2 + k R^2 + k^2 R^2) \\&= \frac{\pi}{3} h_T (R^2 + (kR) R + (kR)^2) \\V_T &= \frac{\pi h_T}{3} (R^2 + r \times R + r^2) \\V_T &= \frac{h_T}{3} (A_b + \sqrt{A_b \times A'_b} + A'_b)\end{aligned}$$

SA₃ : CALCUL LITTERAL

I. Polynômes

1.1. Définition

- Un **monôme de variable x** est une expression de la forme ax^n où $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. a est appelé **le coefficient** et n **le degré** du monôme.
- Un **polynôme de variable x** est une somme algébrique de monômes de variable x . Il est souvent noté $P(x)$; $Q(x)$...
- Le **degré du polynôme** P noté $\deg P$ est celui de son monôme de plus haut degré.

NB: Deux monômes de même degré et de la même variable sont appelés des monômes semblables.

1.2. Développement et réduction

1.2.1. Propriétés

* Suppression de parenthèses

a et b et c sont des nombres réels

- $a + (b - c) = a + b - c$
- $a - (b + c) = a - b - c$
- $a - (b - c) = a - b + c$

* Règle de Priorité

- La multiplication est prioritaire sur l'addition et sur la soustraction.
- L'élévation à une puissance est prioritaire sur la multiplication.

* Développement d'un produit

x, y et z sont des nombres réels, on a :

- $x(y + z) = xy + xz$
- $x(y - z) = xy - xz$

* Réduction

On additionne uniquement les monômes semblables.

Autrement dit, soit a et b deux réels non nuls et n un entier naturel, on a :

$$ax^n + bx^n = (a + b)x^n.$$

1.3. Factorisation

* Mise en évidence d'un facteur commun

Soient a, x et y des nombres réels, on a :

- $ax + ay = a(x + y)$
- $ax - ay = a(x - y)$

* **Produits remarquables**

a et b sont des nombres réels, on a :

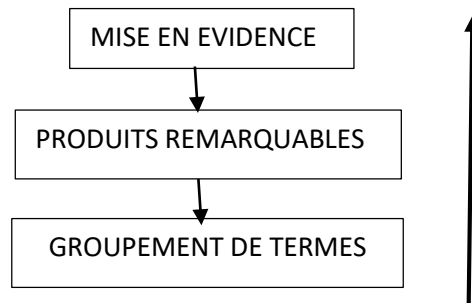
- $(a + b)(a + b)$ est la forme factorisée de $a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)(a - b)$ est la forme factorisée de $a^2 - 2ab + b^2$
- $(a - b)(a + b)$ est la forme factorisée de $a^2 - b^2$

* **Groupement de termes**

Dans le cas où l'expression à factoriser contient 4 termes ou plus, il est préférable de regrouper astucieusement les termes qui vont ensemble entre parenthèses puis utiliser les deux méthodes précédentes pour les factoriser.

* **Méthode mélangée**

Lorsque l'on veut factoriser une expression, il faut toujours essayer les méthodes précédentes dans l'ordre et cycliquement.



Remarque : Dans le cas où aucune des trois (03) méthodes n'est fructueuse, il faut parfois commencer par développer l'expression à factoriser.

II. Equations-Inéquations

2.1. Equations

2.1.1. Equations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R}$

2.1.1.1. Equations du type $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$.

- Résolvons l'équation $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$.
 $ax + b = 0$ équivaut successivement à $ax = -b$

$$x = -\frac{b}{a}$$

- On désigne par $S_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions de l'équation $ax + b = 0$ dans $\mathbb{R}$. Alors $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

2.1.1.2. Equations du type $ax + b = cx + d$ avec $a \neq c$.

- Résolvons l'équation $ax + b = cx + d$
 $ax + b = cx + d \Leftrightarrow ax - cx = d - b$

$$(a - c)x = d - b$$

$$x = \frac{d - b}{a - c}$$

- Soit $S_{\mathbb{R}}$ l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $ax + b = cx + d$.

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{d-b}{a-c} \right\}.$$

2.1.1.3. Equations de type $(ax + b)(cx + d) = 0$ avec $a \neq 0$ et $c \neq 0$.

- Résolvons l'équation $(ax + b)(cx + d) = 0$
 $(ax + b)(cx + d) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$

$$x = -\frac{b}{a} \text{ ou } x = -\frac{d}{c}$$

- L'ensemble des solutions $S_{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$ de l'équation $(ax + b)(cx + d) = 0$ est : $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{b}{a}; -\frac{d}{c} \right\}$.

2.1.1.4. Equations de type $x^2 = a$

Résolvons l'équation $x^2 = a$

- * Si $a = 0$ alors l'équation $x^2 = a$ admet une solution unique 0.
 $S_{\mathbb{R}} = \{0\}$.
- * Si $a < 0$ alors l'équation $x^2 = a$ n'admet pas de solutions réelles.
 $S_{\mathbb{R}} = \{ \}$ ou $S_{\mathbb{R}} = \Phi$
- * Si $a > 0$ alors :

$$x^2 = a \text{ équivaut successivement à } x^2 - a = 0$$

$$x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$$

$$(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$$

$$x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$

$$\text{Et } S_{\mathbb{R}} = \{ -\sqrt{a}; \sqrt{a} \}$$

2.1.1.5. Equation du type $|x - a| = b$

- Si $b = 0$ on a :
 $|x - a| = 0$ équivaut successivement à $x - a = 0$

$$x = a$$

$$\text{Donc } S_{\mathbb{R}} = \{a\}$$

- Si $b < 0$ alors l'équation $|x - a| = b$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- Si $b > 0$ alors on a :
 $|x - a| = b$ équivaut successivement à $x - a = b$ ou $x - a = -b$
 $x = a + b$ ou $x = a - b$
Donc $S_{\mathbb{R}} = \{a - b; a + b\}$.

A noter : Résoudre une équation du premier degré dans $\mathbb{R}$, c'est déterminer les valeurs de la variable qui vérifient l'équation.

Remarque : Les équations : 2.1.1.3 ; 2.1.1.4 et 2.1.1.5 ne sont pas des équations de premier degré mais s'y ramènent.

2.1.2. Système d'équations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$\text{Soit } (S) : \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Résoudre (S), c'est trouver l'ensemble des solutions communes aux deux équations du système (S).

Pour le faire, on utilise :

2.1.2.1. Méthode de substitution

Elle consiste à tirer une des deux inconnues dans une des équations et porter son expression dans la seconde équation.

2.1.2.2. Méthode de combinaison ou d'addition

Elle consiste à éliminer une des variables en multipliant l'une ou les deux équations par des réels pouvant faire disparaître une inconnue après une addition membre à membre.

2.1.2.3. Méthode de comparaison

Elle consiste à déterminer l'expression de la variable x (resp. y) dans les deux équations du système. Ensuite, poser l'égalité entre ces deux expressions pour déterminer la valeur de la variable y (resp. x).

2.1.2.4. Résolution graphique

Elle consiste à représenter les droites des équations du système dans un même repère puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

2.2. Inéquations

2.2.1. Inéquation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R}$

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

Inéquations	Valeurs prises par la variable	Sous forme d'intervalle	Solutions dans $\mathbb{R}$
$ax > b$	$x > \frac{b}{a}$	$x \in \left] \frac{b}{a}, +\infty \right[$	$S_{\mathbb{R}} = \left] \frac{b}{a}, +\infty \right[$
$ax \geq b$	$x \geq \frac{b}{a}$	$x \in \left[\frac{b}{a}, +\infty \right[$	$S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{b}{a}, +\infty \right[$
$ax < b$	$x < \frac{b}{a}$	$x \in \left] -\infty, \frac{b}{a} \right[$	$S_{\mathbb{R}} = \left] -\infty, \frac{b}{a} \right[$
$ax \leq b$	$x \leq \frac{b}{a}$	$x \in \left] -\infty, \frac{b}{a} \right]$	$S_{\mathbb{R}} = \left] -\infty, \frac{b}{a} \right]$

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$

Inéquations	Valeurs prises par la variable	Sous forme d'intervalle	Solutions dans $\mathbb{R}$
$ax > b$	$x < \frac{b}{a}$	$x \in \left] -\infty, \frac{b}{a} \right[$	$S_{\mathbb{R}} = \left] -\infty, \frac{b}{a} \right[$
$ax \geq b$	$x \leq \frac{b}{a}$	$x \in \left] -\infty, \frac{b}{a} \right]$	$S_{\mathbb{R}} = \left] -\infty, \frac{b}{a} \right]$
$ax < b$	$x > \frac{b}{a}$	$x \in \left] \frac{b}{a}, +\infty \right[$	$S_{\mathbb{R}} = \left] \frac{b}{a}, +\infty \right[$
$ax \leq b$	$x \geq \frac{b}{a}$	$x \in \left[\frac{b}{a}, +\infty \right[$	$S_{\mathbb{R}} = \left[\frac{b}{a}, +\infty \right[$

2.2.2. Système d'inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R}$

2.2.2.1. Définition

Deux ou plus de deux inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R}$ simultanées déterminent un système d'inéquations.

Exemple : $\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ x - 15 \leq 0 \end{cases}$ est un système de deux inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R}$ d'inconnue x .

2.2.2.2. Résolution

Pour résoudre de tel système, on résout séparément chacune des inéquations du système. Et l'ensemble des solutions du système dans $\mathbb{R}$ est l'intersection des ensembles de chacune des inéquations du système.

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$: (S) : $\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 3x + 5 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x - 3 < 0 \\ 3x + 5 \geq 0 \end{cases}$ équivaut successivement à $\begin{cases} 2x < 3 \\ 3x \geq -5 \end{cases}$

$$\begin{cases} x < \frac{3}{2} \\ x \geq -\frac{5}{3} \end{cases}$$
$$\begin{cases} x \in \left] -\frac{5}{3}, \frac{3}{2} \right[\\ x \in \left[-\frac{5}{3}, \frac{3}{2} \right[\end{cases}$$

D'où l'ensemble des solutions de (S) dans $\mathbb{R}$ est :

$$S_{\mathbb{R}} = \left] -\frac{5}{3}, \frac{3}{2} \right[\cap \left[-\frac{5}{3}, \frac{3}{2} \right[= \left[-\frac{5}{3}, \frac{3}{2} \right[$$

2.2.3. Système d'inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2.2.3.1. Inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Soit (I): $3x - y + 1 \geq 0$ est un exemple d'inéquation du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Pour le résoudre,

- On trace dans le plan rapporté à un repère orthonormé la droite d'équation $3x - y + 1 = 0$.
Cette droite partage le plan en deux demi-plans dont l'un est l'ensemble des solutions de l'inéquation proposée.
 - Pour retrouver cet ensemble, on remplace x et y par zéro (0) dans l'équation :
- * Si l'inégalité garde son sens alors le demi-plan contenant l'origine du repère est l'ensemble des solutions (C'est-à-dire que l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient l'inéquation donnée)
 - * Dans le cas où l'inégalité change de sens alors c'est le demi-plan qui ne contient pas l'origine qui est l'ensemble des solutions.

2.2.3.2. Résolution d'un système d'inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Pour résoudre un système d'inéquations du 1^{er} degré dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il faut résoudre dans le plan chacune des inéquations et en déduire l'ensemble des solutions qui est l'intersection des ensembles des solutions des inéquations du système.

III. VECTEURS

3.1. Somme de vecteurs

3.1.1. Egalité de deux vecteurs

Deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont :

- * La même direction
- * Le même sens
- * La même longueur

3.1.2. Egalité de Chasles

Soient A, B et C des points.

D'après la relation Chasles, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

3.1.3. Vecteurs opposés

Soient A et B des points.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés.

On note : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

3.1.4. Calcul d'une somme de vecteurs

Pour effectuer une somme de plusieurs vecteurs, on peut se permettre de déplacer et de regrouper certains vecteurs et aussi utiliser la relation de Chasles.

3.2. Produit d'un vecteur par un nombre réel

3.2.1. Définition

On appelle produit d'un vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ par un réel k , le vecteur $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{AB}$ tel que :

- * Les droites (MN) et (AB) ont la même direction.
- * $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont le même sens si $k > 0$ (k positif) puis $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraire si $k < 0$ (k négatif).

3.2.2. Propriétés

A, B, C et D sont des points du plan ; k et k' sont des nombres réels. On a :

- $k\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{CD} = k(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})$
- $k\overrightarrow{AB} + k'\overrightarrow{AB} = (k + k')\overrightarrow{AB}$
- $k(k'\overrightarrow{AB}) = (kk')\overrightarrow{AB}$
- $1\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

A noter :

- * Le produit d'un vecteur par zéro (0) est un vecteur nul.
- * Le produit d'un vecteur nul par un réel est un vecteur nul.

3.3. Vecteurs colinéaires

3.3.1. Propriétés

Soient A, B, C et D des points.

- * S'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- * Inversement, si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires alors il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

A noter :

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

3.3.2. Points alignés

Trois (3) points A, B et M sont alignés lorsqu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

Exemple :

Soit I le milieu d'un segment $[AB]$. On a : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.

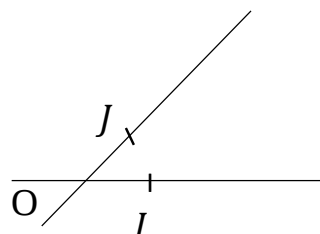
3.4. Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux lorsqu'ils sont des vecteurs directeurs de deux droites perpendiculaires.

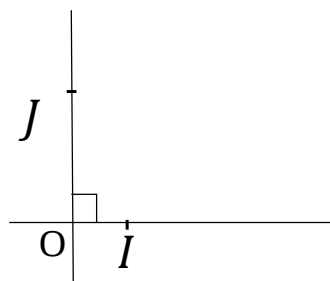
IV. Coordonnées de vecteurs

4.1. Coordonnées d'un vecteur

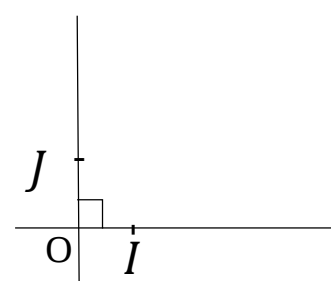
4.1.1. Différents repères



Repère quelconque



Repère orthogonal
 $(OI) \perp (OJ)$



Repère orthonormé
 $(OI) \perp (OJ)$ et $OI = OJ$

4.1.2. Coordonnées d'un point

- Dans un repère (O, I, J) , soit $M(x, y)$ un point du plan.

Alors le vecteur $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$.

- Soient A et B deux points du plan de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) dans le repère (O, I, J) .

On a: $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

4.1.3. Propriétés

- Si $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x_{CD} \\ y_{CD} \end{pmatrix}$ alors $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \begin{pmatrix} x_{AB} + x_{CD} \\ y_{AB} + y_{CD} \end{pmatrix}$
- Si $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_{AB} \\ y_{AB} \end{pmatrix}$ et $k \in \mathbb{R}$ alors $k\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} kx_{AB} \\ ky_{AB} \end{pmatrix}$
- Soit I le milieu du segment $[AB]$. Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ alors $I \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.

4.1.4. Distance de deux points

Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

4.2. Vecteurs colinéaires-Vecteurs orthogonaux

Soient $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls du plan muni d'un repère orthonormé.

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont **colinéaires** équivaut à $xy' - x'y = 0$.
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont **orthogonaux** équivaut à $xx' + yy' = 0$.

V. Equations de droite

5.1. Définition

- L'équation cartésienne d'une droite (Δ) s'écrit sous la forme de $Ax + By + C = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$.
- L'équation de la droite (Δ) sous la forme $y = ax + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ est appelée "**équation réduite de (Δ)** " (lorsque (Δ) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées)
 - * a est le **coefficient directeur** de (Δ)
 - * b est l'**ordonnée à l'origine** de (Δ) .

Exemple: Soit (Δ) la droite d'équation $-2x + 3y - 1 = 0$.

L'équation réduite de (Δ) est : $(\Delta): y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$.

Donc $\frac{2}{3}$ est son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine est $\frac{1}{3}$.

5.2. Recherche d'une équation de droite connaissant deux points de la droite

Déterminer une équation de la droite (D) passant par $A(1,6)$ et $B(4,0)$.

Solution : Comme $1 \neq 4$ alors une équation de (D) est sous la forme $y = ax + b$.

Cherchons a et b .

$$\text{On a: } a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 6}{4 - 1} = \frac{-6}{3} = -2$$

Comme $A \in (D)$ alors $y_A = -2x_A + b$

$$y_A = -2x_A + b \text{ équivaut successivement à } b = y_A + 2x_A = 6 + (2 \times 1) = 8$$

D'où $(D): y = -2x + 8$.

Remarque : Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$

- * Si $x_A = x_B$ alors $(AB): x = x_A$
- * Si $y_A = y_B$ alors $(AB): y = y_A$

5.3. Positions relatives de deux droites

Soient $(\Delta): y = ax + b$ et $(\Delta'): y = a'x + b'$

- $(\Delta) // (\Delta')$ équivaut à $a = a'$
- $(\Delta) \perp (\Delta')$ équivaut à $a \times a' = -1$.

SA₄ : ORGANISATION DES DONNEES

I. Application affines

1.1. Notions

- $f(x) = ax + b$ est l'expression d'une **application affine** f .
 - * a est le **coefficient** de f
 - * b est le **terme constant** de f .
- *Déterminer une application affine f revient à déterminer son coefficient et son terme constant.*

1.2. Sens de variation

- Soient x_1 et x_2 deux nombres réels et f une application affine.
 - * Si $x_1 < x_2$ et $f(x_1) < f(x_2)$ alors l'application f est dite **croissante** sur $\mathbb{R}$.
 - * Si $x_1 < x_2$ et $f(x_1) > f(x_2)$ alors f est dite **décroissante** sur $\mathbb{R}$.
 - * Si $x_1 \neq x_2$ et $f(x_1) = f(x_2)$ alors f est **constante**.
- Soit f une application affine telle que $f(x) = ax + b$.
 - * Si $a > 0$ alors f est **croissante** sur $\mathbb{R}$
 - * Si $a < 0$ alors f est **décroissante** sur $\mathbb{R}$
 - * Si $a = 0$ alors f est **constante** sur $\mathbb{R}$

II. Application linéaire

2.1. Notion

- $f(x) = ax$ est l'expression d'une **application linéaire** f .
- Une application linéaire est une application affine dont le terme constant est nul.

2.2. Propriétés de linéarité

Soit f une application linéaire

- * $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
- * $f(kx) = kf(x)$.

2.3. Sens de variation

Le sens de variation d'une application linéaire est le même que celui d'une application affine.

« Tu dois avoir la foi »

