

Exercice 1 :

Convergence et calcul des intégrales suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i)} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} & \text{(ii)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{\arctan x} dx}{1+x^2} & \text{(iii)} \quad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{3^x} \\
 \text{(vi)} \quad \int_1^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2} & \text{(v)} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)}} & \text{(vi)} \quad \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} dx
 \end{array}$$

On rappelle que $\arctan A \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$

Exercice 2 :

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes :

$$\begin{array}{lll}
 \text{(i)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{(x-5)}{x^2+4x+4} dx & \text{(ii)} \quad \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}} dx & \text{(iii)} \quad \int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx \\
 \text{(vi)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{(1+x^2)} dx & \text{(v)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx & \text{(vi)} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\sqrt{e^x-1}} dx
 \end{array}$$

Exercice 3 :

Déterminer la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+e^x} dx$ selon la valeur de $a \in \mathbb{R}$

Exercice 4 :

On pose $\int_0^{+\infty} \frac{x^2-1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}} dx$

1. Montrer que l'intégrale converge :
2. En utilisant le changement de variable $\frac{1}{x}$, calculer I

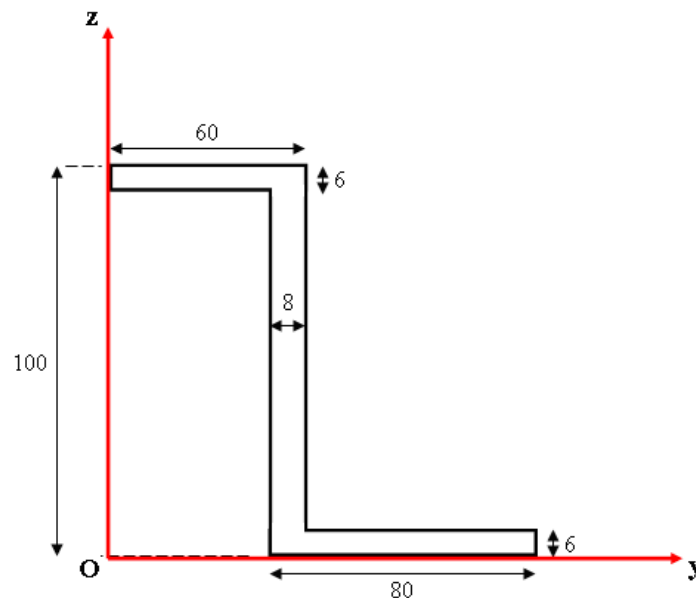
Exercice 5 :

Déterminer la nature des intégrales suivantes. On pourra comparer à des intégrales de références.

$$(i) \int_1^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2} dx \quad (ii) \int_0^1 \frac{e^{\cos x}}{x} dx \quad (iii) \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^{17/5} + 1} dx$$

Exercice 6 : RDM

Soit la section S ci-dessous, les dimensions sont données en mm.



Déterminer les moments statiques par rapport à oy et par rapport à oz

Exercice 7 : Thermodynamique

Modèle de l'atmosphère isotherme

On étudie le modèle de la couche d'air au contact de la Terre dans le domaine d'altitude $0 < z < 11$ km, en équilibre et pour lequel le gradient vertical de température est constant :

$T(z) = T_0 - az$ ou a est une constante. On assimile l'air à un gaz parfait, on suppose le champ de pesanteur uniforme. On donne la loi de

l'hydrostatique vérifié par tout fluide en équilibre dans le champ de pesanteur : $\frac{dP}{dz} = \rho z$

(P : pression ; ρ : masse volumique du fluide ; z : altitude)

- 1) Déterminer la relation $P(z)$ entre la pression et l'altitude.
- 2) En déduire la relation entre la masse volumique de l'air et l'altitude.
- 3) Au voisinage du sol, la température diminue de 1,4 K si on s'élève de 200 m.

Déterminer :

- a) la valeur de a
- b) l'altitude z_1 pour laquelle la pression est égale à la moitié de celle au sol
- c) la température qui règne à cette altitude

Données : $g = 10 \text{ m/s}^2$; $M = 29 \text{ g/mol}$; $R = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Au niveau du sol : $T_0 = 290 \text{ K}$ et $p_0 = 1 \text{ atm}$.