



Ecole Supérieure d'Ingénieurs
des Travaux de la Construction

ENTRE VOUS
ET LE FUTUR
IL N'Y A QU'UN PONT



DEVENEZ INGÉNIEUR · E
WWW.ESITC-CAEN.FR

Outils Mathématiques pour la physique

Y. eL MenDILI



Plan du cours



- Chap. I : Intégrales généralisées (ou impropres).
- Chap. II : Transformée de Laplace.
- Chap. III : Transformée de Fourier.

Table des matières

- 1 Rappels : Intégrale de Riemann
- 2 Objectifs du cours
- 3 Définition et exemples
- 4 Calcul des intégrales impropres
- 5 Critères généraux de convergence d'une intégrale impropre

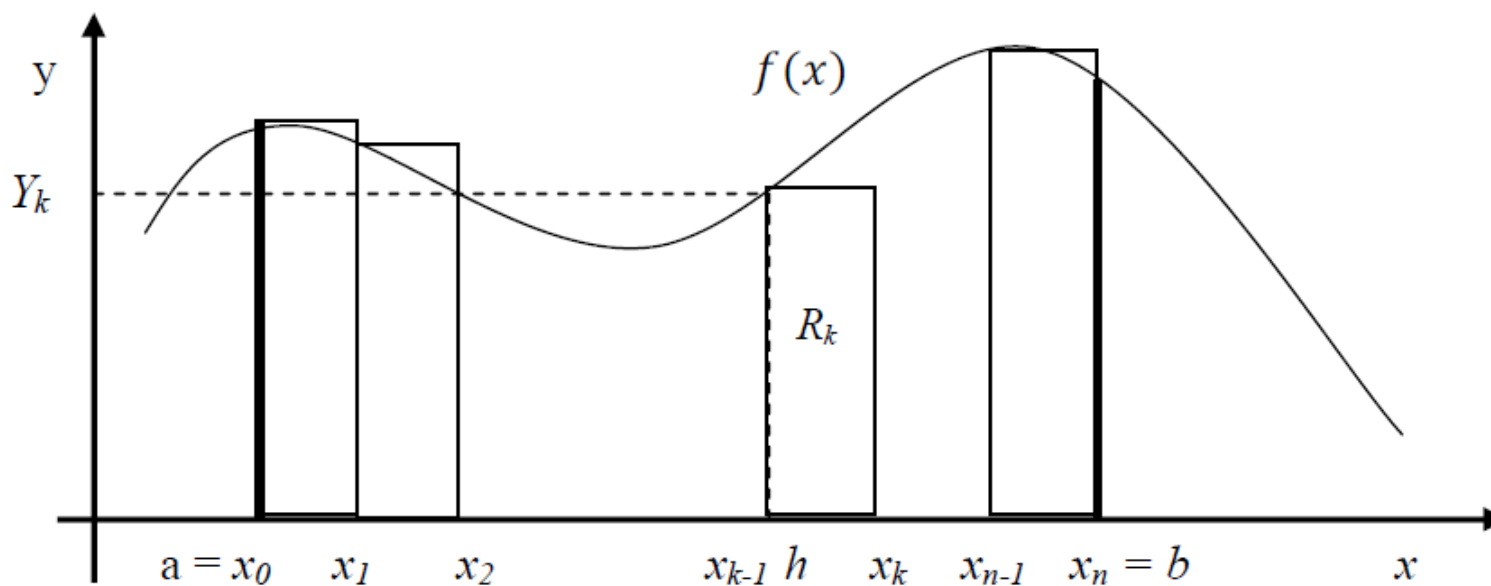
Intégrale de Riemann (définie)

Soit f une fonction de la variable réelle x telle que pour tout x de l'intervalle $[a, b]$ $f(x) \geq 0$. On note C_f sa représentation graphique, on appelle S la surface décrite par :

$$S: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

$x_0, x_1, \dots, x_n$ des réels tels que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$

Dans chaque intervalle de la forme $[x_{k-1}, x_k]$ on choisit un réel h_k (au hasard) et on pose $Y_k = f(h_k)$. On appelle alors R_k le rectangle de base $[x_{k-1}, x_k]$ et de hauteur Y_k .



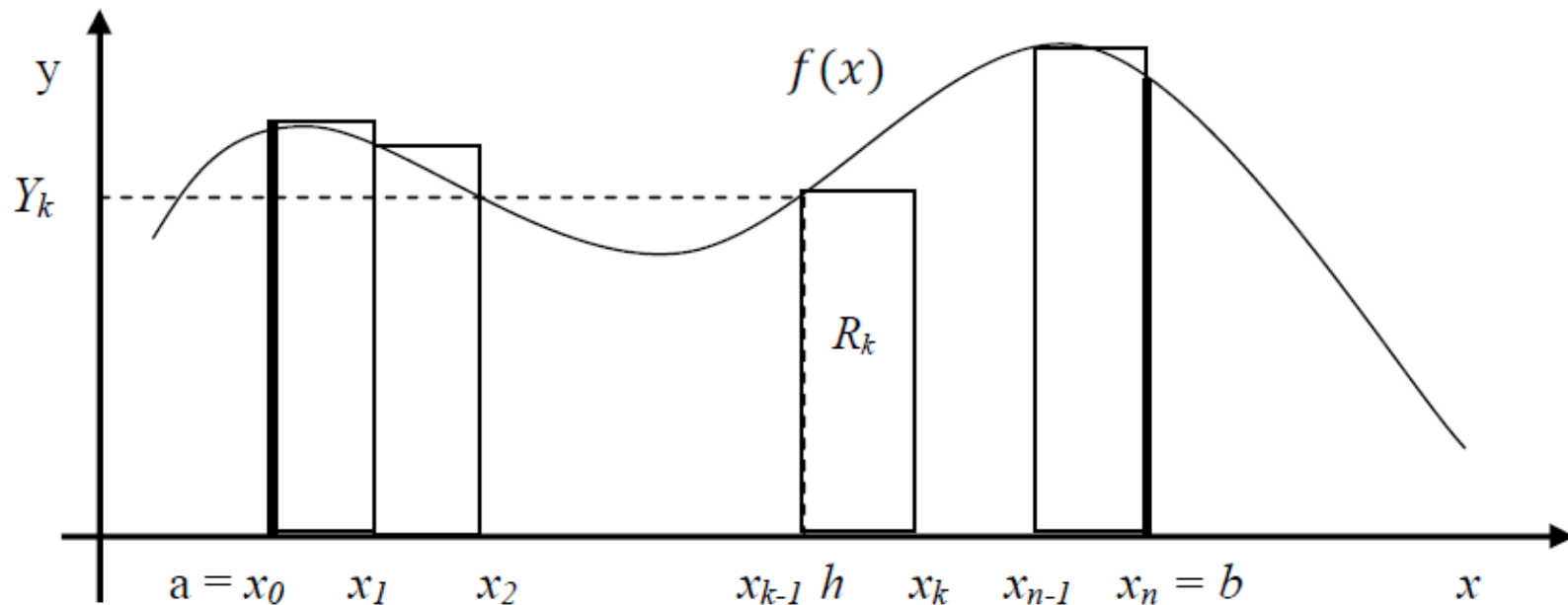
Les rectangles R_k recouvrent approximativement la surface S , plus les largeurs des rectangles R_k sont petites, plus l'approximation est « bonne ».

On définit $\Delta x = \max_{k=1 \dots n} (x_k - x_{k-1})$ et on impose la condition $\Delta x \rightarrow 0$, Riemann pose alors $S_n = \sum_{k=1}^n y_k (x_k - x_{k-1})$ et on démontre que :

Si $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} S_n = L$ alors L ne dépend pas du choix des $x_0, x_1, \dots, x_n$ ni des h_k .

Dans ce cas on note L sous la forme $\int_a^b f(x) dx$ qui se lit 'somme entre a et b de $f(x) dx$ '.

a et b sont les bornes de l'intégrale, $f(x) dx$ est l'intégrande, dx est l'élément différentiel et x est une variable « muette » qui n'intervient pas dans le résultat.



Propriétés

- **Positivité** : si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a, b]$ avec $a < b$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- **Conservation de l'ordre** :

Si $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

- **Linéarité** : $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$
- **Relation de Chasles** : $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$
- **Symétries** : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \begin{cases} 2 \int_0^{+\infty} f(x)dx & \text{si } f \text{ est paire} \\ 0 & \text{si } f \text{ est impaire} \end{cases}$
- **Période** : si f a pour période T alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx \text{ et } \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

- $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
- Si F est une primitive quelconque de f alors on a :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Applications

Valeur moyenne – Valeur efficace

La valeur moyenne de « plusieurs » nombres est la constante qui en remplaçant chacun de ces nombres donnerait la même « somme ».

Exemple :

- Calculer la moyenne des carrés des réels compris entre 0 et 1:

$$\int_0^1 x^2 dx = \int_0^1 m dx \Rightarrow m = 1/3.$$

- Calculer la moyenne des sinus des réels compris entre 0 et $\pi/2$:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(x) dx = \int_0^{\pi/2} m dx \Rightarrow m = 2/\pi.$$

Définitions :

La fonction f étant intégrable dans $[a, b]$:

On appelle moyenne de $f(x)$ dans $[a, b]$ le nombre $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

On appelle valeur efficace de $f(x)$ dans $[a, b]$ le nombre v tel que $v^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)^2 dx$

Intégrales indéfinies :

La notation sans borne $\int f(x)dx$ présente intégrale indéfinie, le calcul de cette intégrale se termine toujours par une constante d'intégration.

Exemple:
$$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + cste$$

Intégrale généralisées :

La méthode de Riemann ne peut s'appliquer qu'à des intégrales dans un intervalle borné lorsque l'une des deux bornes d'intégration est infini le calcul de l'intégrale passe par un calcul de limite.

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ désigne } \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

De même, pour $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ désigne $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$

Enfin, pour la notation $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, on sépare l'intégrale en deux parties pour pouvoir traiter séparément les deux limites.

Primitives usuelles

HYPOTHÈSES	FONCTION $x \mapsto \dots$	PRIMITIVE $x \mapsto \dots$
u de classe $\mathcal{C}^1$ sur I	$u' e^u$	e^u
u de classe $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant pas sur I	$\frac{u'}{u}$	$\ln(u)$
u de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement positive sur I	$u' u^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha + 1} u^{\alpha+1}$

FONCTION $x \mapsto \dots$	PRIMITIVE $x \mapsto \dots$	DOMAINE DE VALIDITÉ
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$x^n, n \in \mathbb{Z}, n \leq -2$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$	$\frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln(\cos(x))$	$] -\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{a^2+x^2}, a > 0$	$\frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right)$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$	$\mathbb{R}_+^*$

2 Intégrales généralisée

Dans la partie rappel, nous avons donc défini et étudié la notion d'intégrale de Riemann pour des fonctions définies sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$ dites intégrables au sens de Riemann. On va maintenant s'intéresser aux fonctions f à valeurs réelles ou complexes définies sur un intervalle $[a, b[$ (resp. $]a, b]$), b pouvant être $+\infty$ (resp. a pouvant être $-\infty$), et qui ne sont pas nécessairement bornées. On considérera ensuite les fonctions définies seulement sur des intervalles ouverts $]a, b[$, éventuellement non bornés

Exemples : $\frac{1}{x}$ sur $]0, 1]$ ou sur $[1, +\infty[$, $\ln(x)$ sur $]0, 1]$ ou $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ sur $]0, 1[...$

Cas d'un problème à une seule borne :

On donne ici la définition pour l'intervalle $[a, b[$ où $-\infty < a < b < +\infty$.

On adaptera cette définition pour les intervalles suivants : $[a, +\infty[$, $] -\infty, b]$ et $]a, b]$.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b[\subset \mathcal{R}$.

On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente (ou converge, ou existe) lorsque l'intégrale partielle $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ possède une limite finie lorsque $x \rightarrow b^-$, Si c'est le cas, on note cette limite $\int_a^{\rightarrow b} f(t)dt$ dans le cas contraire on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est divergente ou qu'elle n'a pas de sens.

Remarque :

Si on est dans le cas de la convergence, et en notant F une primitive quelconque de f sur $[a, b[$, on utilisera la notation, $\int_a^{\rightarrow b} f(t)dt = [F(t)]_a^{\rightarrow b} = \lim_{\rightarrow b} [F(a) - F(b)]$

Soit $c \in [a, b[$: $\int_a^{\rightarrow b} f(t)dt$ converge donc $\int_c^{\rightarrow b} f(t)dt = F(b) - F(c)$

Exemples :

- Soit f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = 1/t^2$. Pour $t \geq 1$ on a :
$$\int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x = 1 - \frac{1}{x} \rightarrow_{x \rightarrow \infty} 1$$
 donc l'intégrale de f sur $[1, +\infty[$ est convergente et on écrit :
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = 1.$$

- Soit g définie sur $[1, +\infty[$ par $g(t) = 1/t$. Pour $x \geq 1$ on a :
$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln t]_1^x = \ln x \rightarrow_{x \rightarrow \infty} +\infty.$$
 donc l'intégrale de g sur $[1, +\infty[$ est divergente

- Considérons la fonction cosinus sur $\mathcal{R}^+$. on a pour tout $x \geq 0$:
$$\int_0^x \cos(t) dt = [\sin(t)]_0^x = \sin(x)$$
 qui n'admet pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$, donc l'intégrale $\int_0^x \cos(t) dt$ n'a pas de sens.

- Soit h définie sur $]0, 1]$ par $h(t) = 1/\sqrt{t}$. Pour $0 < x \leq 1$ on a :
$$\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_x^1 = [2\sqrt{x} - 2] \rightarrow_{x \rightarrow 0} 2$$
 est donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ existe et vaut 2.

- Montrons que $\int_{\rightarrow 0}^1 \ln(t) dt$ converge et vaut -1. Pour $0 < x \leq 1$ on a :

$$\int_x^1 \ln(t) dt = [t \ln(t)]_x^1 - \int_x^1 dt = x - 1 - x \ln x \rightarrow_{x \rightarrow 0} -1$$

Cas d'un problème aux deux bornes :

On s'intéresse ici au cas des intervalles $]a, b[$, $] -\infty, b[$, $]a, +\infty[$ et $\mathcal{R}$, c'est à dire au cas des intégrales doublement impropres. Donnons par exemple la définition sur $]a, b[$.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, b[\subset \mathbb{R}$ et $c \in]a, b[$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est convergente lorsque les deux intégrales $\int_{\rightarrow a}^c f(t)dt$ et $\int_c^{\rightarrow b} f(t)dt$ convergent. Si c'est le cas, on note $\int_{\rightarrow a}^{\rightarrow b} f(t)dt = \int_{\rightarrow a}^c f(t)dt + \int_c^{\rightarrow b} f(t)dt$. Sinon on dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est divergente.

Remarque :

Il faut couper pour connaître la nature d'une intégrale impropre. On retiendra par exemple que $\int_{-x}^{+x} \sin t \, dt \rightarrow_{x \rightarrow \infty} 0$ et pourtant $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t \, dt$ n'a pas de sens puisque $\int_0^{+\infty} \sin t \, dt$ diverge.

Exemple :

On a déjà montré que $\int_1^{+\infty} dt/t^2$ est convergente. Pour $x \in]0, 1]$ on a :

$\int_x^1 dt/t^2 = 1/x - 1 \rightarrow_{x \rightarrow 0^+} +\infty$. Donc $\int_{\rightarrow 0^+}^1 dt/t^2$ diverge. Ainsi l'intégrale $\int_{\rightarrow 0}^{+\infty} dt/t^2$ est divergente.

Calcul des intégrales impropres

Nous énonçons les propriétés suivantes qui montrent que les intégrales impropres (convergentes) possèdent les mêmes propriétés de linéarité, d'additivité et de croissance que les intégrales de Riemann.

Propriété

Linéarité. Si f et g ont des intégrales convergentes sur $]a, b[$ alors $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\int_a^b \alpha f + \beta g$ converge et $\int_a^b \alpha f + \beta g = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$.

Croissance. Si f est positive sur $[a, b[$ et si $\int_a^b f$ converge alors $\int_a^b f \geq 0$.

La preuve est directe et repose sur les propriétés de linéarité et de croissance de l'intégrale de Riemann et un passage à la limite.

Les changements de variable et l'intégration par parties doivent être effectués avec précaution. On considérera toujours des intégrales de Riemann en faisant tendre "x" vers le point à problème.

Théorème (changement de variables)

Soient $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$, C_1 et bijective alors

$$\int_a^x f(x)dx \text{ et } \int_a^x f \circ \varphi(t)\varphi'(t)dt$$

sont deux intégrales impropres de même nature et si elles convergent

$$\int_a^x f(x)dx = \int_a^x f \circ \varphi(t)\varphi'(t)dt$$

Preuve

La preuve est similaire à la preuve du changement de variable pour les intégrales de Riemann avec en plus un passage à la limite. Le fait que φ soit bijective permet d'assurer l'équivalence "une intégrale converge" $\Leftrightarrow$ "l'autre intégrale converge".

Théorème (changement de variables)

Exemple de changement de variable

Calcul de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+(\ln t)^2)}$

La fonction $f(t) = \frac{1}{t(1+(\ln t)^2)}$ est continue sur $[1, +\infty[$. Par comparaison avec les intégrales de Bertrand, on remarque que l'intégrale est convergente. On considère le changement de variable $x = \varphi(t) = \ln(t)$. La fonction $\varphi : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est C^1 et croissante, $\varphi'(t) = t^{-1}$ et on obtient donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(1+(\ln t)^2)} = \int_{0=\varphi(1)}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{u \rightarrow +\infty} [\arctan(u)]_0^u$$

Une autre technique classique est l'intégration par parties (utile par exemple lorsque la fonction à intégrer est un produit de fonctions exp ou trigo et de polynômes).

Les intégrales de Bertrand

$$\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$$

L'intégrale converge si $(\alpha > 1)$ ou $(\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1)$

Théorème (intégration par parties)

Soient f et g deux fonctions C^1 sur $]a, b[$.

Si la fonction fg a des limites finies en a et en b alors

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt \text{ et } \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

sont de même nature et si elles convergent

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = \lim_{\rightarrow b} fg - \lim_{\rightarrow a} fg - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

Exemple $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$

La fonction $h(x) = xe^{-x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et positive. Effectuons une intégration par parties pour calculer cette intégrale en posant $f(x) = x$ et $g'(x) = e^{-x}$. On a, pour $t > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^t xe^{-x}dx &= [-xe^{-x}]_0^t - \int_0^t (-e^{-x})dx \\ &= -te^{-t} - (e^{-t} - 1) \end{aligned}$$

On a $\lim_{t \rightarrow \infty} te^{-t} = 0$ et $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0$, l'intégrale convergente vaut donc 1.

Critères généraux de convergence d'une intégrale impropre

On ne sait pas toujours calculer (rarement en fait) explicitement la primitive de la fonction à intégrer. On pourra cependant déterminer dans bien des cas si l'intégrale considérée est convergente ou non.

Comparaison de fonctions positives (ou de signe constant)

Les propriétés suivantes pourront être appliquées à des fonctions qui sont de signe constant autour du "point à problème". Commençons par présenter quelques intégrales de référence

Propriétés

L'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ est convergente ssi } \alpha > 1.$$

L'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ est convergente ssi } \alpha < 1$$

Preuve

Si $\alpha = 1$, une primitive de $f(t) := t^{-1}$ est la fonction $\ln$ et les deux intégrales divergent.

Si $\alpha \neq 1$ alors

$$\begin{aligned} F(x) &:= \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_1^x \\ &= \frac{1}{1-\alpha} (x^{1-\alpha} - 1). \end{aligned}$$

La limite de $F(x)$ quand $x \rightarrow \infty$ est finie ssi $1 - \alpha < 0$ soit $\alpha > 1$. Par ailleurs

$$\begin{aligned} G(x) &:= \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_x^1 \\ &= \frac{1}{1-\alpha} (1 - x^{1-\alpha}). \end{aligned}$$

Or $x^{1-\alpha}$ a une limite finie quand $x \rightarrow 0$ ssi $1 - \alpha > 0$, soit $\alpha < 1$.

Théorème (théorème de comparaison)

Soient f et g deux fonctions $[a, b[\rightarrow \mathbb{R}_+$, $\forall x \in [a, b[, 0 \leq f(x) \leq g(x)$.

- Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge et

$$0 \leq \int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

- Si $\int_a^b f$ diverge alors $\int_a^b g$ diverge

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt$$

La fonction $f(t) = e^{-t^2}$ est positive et pour tout $t \geq 1$ on a $f(t) \leq g(t) := e^{-t}$. Comme $\int_1^\infty e^{-t} dt$ est une intégrale convergente, on a par le théorème de comparaison que l'intégrale $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$ est convergente. On peut même en déduire que

$$\int_0^{+\infty} g(t)dt$$
$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt$$

$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt \leq 1 + \frac{1}{e}.$$

(On peut montrer par un autre type de calcul que cette intégrale vaut $\sqrt{\pi}/2$.)

Théorème (théorème d'équivalence)

Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $]a, b]$. Supposons qu'elles soient équivalentes au voisinage de a , c'est-à-dire :

$$\lim_{t \rightarrow a^+} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$$

Si $\int_a^b g$ converge alors $\int_a^b f$ converge et

Attention : il est important que f et g soient positives.

L'équivalence de f et g au voisinage de a sera notée par : $f(t) \sim g(t)$ (ou bien $f(t) \sim g(t)$ pour préciser que la limite en a est la limite à droite).

Preuve

L'intégrale $\int_0^1 \sqrt{\frac{-\ln t + 1}{\sin t}} dt$ converge.

En effet, $\sqrt{\frac{-\ln t + 1}{\sin t}} \underset{0^+}{\sim} \frac{(-\ln t)^{1/2}}{\sqrt{t}},$

L'utilisation des équivalents permet ainsi de ramener l'étude de la convergence d'une intégrale pour laquelle on n'a pas de primitive à un catalogue d'intégrales dont la convergence est connue.

EXERCICE appliqué (Thermodynamique) : modèle de l'atmosphère isotherme

On étudie le modèle de la couche d'air au contact de la Terre dans le domaine d'altitude

$0 < z < 11$ km, en équilibre et pour lequel le gradient vertical de température est constant :

$T(z) = T_0 - az$ ou a est une constante positive. On assimile l'air à un gaz parfait, on suppose le champ de pesanteur uniforme. On donne la loi de l'hydrostatique vérifiée par tout fluide en équilibre dans le champ

de pesanteur : $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ (P : pression ; ρ : masse volumique du fluide ; g : pesanteur)

- 1) Déterminer la relation $P(z)$ entre la pression et l'altitude.
- 2) En déduire la relation entre la masse volumique de l'air et l'altitude.
- 3) Au voisinage du sol, la température diminue de 1,4 K si on s'élève de 200 m.

Déterminer :

- a) la valeur de a
- b) l'altitude z_1 pour laquelle la pression est égale à la moitié de celle au sol
- c) la température qui règne à cette altitude

Données : $g = 10 \text{ m/s}^2$; $M = 29 \text{ g/mol}$; $R = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$

au niveau du sol : $T_0 = 290 \text{ K}$ et $p_0 = 1 \text{ atm}$.

$$1) \quad P(z) = P_0 \left(1 - \frac{a}{T_0} z \right)^{\frac{Mg}{Ra}} \quad \text{et} \quad \rho(z) = \rho_0 \left(1 - \frac{a}{T_0} z \right)^{\frac{Mg}{Ra} - 1}$$

$$2) \text{ a) } a = 0,007 \text{ K,m}^{-1}$$

$$\text{b) } z = 5,4 \text{ km}$$

$$\text{c) } T = -20 \text{ }^{\circ}\text{C}$$

Conséquences

Les relevés de pression pour Paris étant au parc Montsouris, si on habite dans un étage élevé, il faut corriger la pression indiquée par un baromètre de la différence d'altitude entre sa chambre et le parc Montsouris (la différence de pression étant faible, on peut alors linéariser l'exponentielle).

En altitude, il est difficile de cuire les aliments à l'eau. En effet, la pression a diminué et du coup l'eau ne bout plus à 100°C mais plutôt à des températures avoisinant les 80°C .

Exercice. Convergence et calcul des intégrales suivantes.

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}$$

Posons $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ l'action f est continue sur $[2 ; +\infty[$ donc pour étudier la convergence de l'intégrale, il sut de se préoccuper du comportement au voisinage de $+1$. Soit $A > 0$. Décomposons $f(x)$ sous la forme

$$\frac{\lambda}{x+1} + \frac{\mu}{x-1}$$

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{\lambda}{x+1} + \frac{\mu}{x-1} \iff \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{\lambda(x-1) + \mu(x+1)}{x^2 - 1}$$

$$\iff \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{(\lambda + \mu) + (\mu - \lambda)x}{x^2 - 1}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \mu - \lambda = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = -\lambda \\ 2\lambda = -1 \end{cases}$$

$$\iff \lambda = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{1}{2}$$

et donc $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1}$; par suite :

$$\begin{aligned}
\int_2^A \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2} \int_2^A \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int_2^A \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2} [\ln|x-1|]_2^A - \frac{1}{2} [\ln|x+1|]_2^A \\
&= \frac{1}{2} (\ln(A-1) - \ln 1) - \frac{1}{2} (\ln(A+1) - \ln 3) = \frac{1}{2} \ln \frac{A-1}{A+1} + \frac{1}{2} \ln 3 \\
&\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln 3,
\end{aligned}$$

car $\frac{A-1}{A+1} = \frac{1-\frac{1}{A}}{1+\frac{1}{A}} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1$ donc $\ln \frac{A-1}{A+1} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \ln 1 = 0$. Par suite, l'intégrale converge et

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln 3.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$$

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx &= \left[2\sqrt{\sin x} \right]_{\varepsilon}^{\pi/4} = 2\sqrt{\sin \frac{\pi}{4}} - 2\sqrt{\sin \varepsilon} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 2\sqrt{\sin \varepsilon} \\ &= 2 \times \frac{2^{1/4}}{2^{1/2}} - 2\sqrt{\sin \varepsilon} = 2^{3/4} - 2\sqrt{\sin \varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 2^{3/4}, \end{aligned}$$

donc l'intégrale est convergente et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = 2^{3/4}$.



FIN