



CHAPITRE 1 : OUTILS FONDAMENTAUX D'ALGÈBRE

INTRODUCTION

Algèbre :

Branche des mathématiques ayant pour objet de simplifier et de résoudre au moyen de formules des problèmes où les grandeurs sont représentées par des symboles, et d'en généraliser les résultats.

Objectifs :

- ☐ Revoir les notions de base : puissances, racines carrées, valeur absolue.
- ☐ Apprendre à transformer et simplifier les expressions.
- ☐ Maîtriser les formes canonique et factorisée.
- ☐ Introduire la résolution d'inéquations, la trigonométrie et les nombres complexes.

Pourquoi c'est important ?

- ☐ Fondations pour toute la suite du cours.
- ☐ Essentiel en analyse, géométrie et physique.

I – PUISSANCES, RACINE CARRÉE ET VALEUR ABSOLUE

Puissances

Définition :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On définit a puissance n par $a^n = \underbrace{a * \cdots * a}_{n \text{ fois}}$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Par convention, on note $a^0 = 1$.

Propriétés :

Quelques propriétés **importantes** sur les règles de calcul avec les puissances :

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $n, m \in \mathbb{Z}$.

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
 - $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
 - $(a^n)^m = a^{n*m}$
 - $(ab)^n = a^n b^n$
 - $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
 - $(a+b)^2 = (a-b)(a+b)$
 - $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
 - $a^2 - b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- Ces 3 propriétés sont des identités remarquables, et sont à connaître **absolument**

Le binôme de Newton

On vient de voir comment calculer $(a + b)^2$. Mais comment faire pour un n quelconque ?

Coefficient binomial

On appelle coefficient binomial, noté $\binom{n}{k}$, le nombre $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Il représente le nombre de façons différentes de piocher k boules dans un sac contenant n boules. On dit alors « k parmi n ».

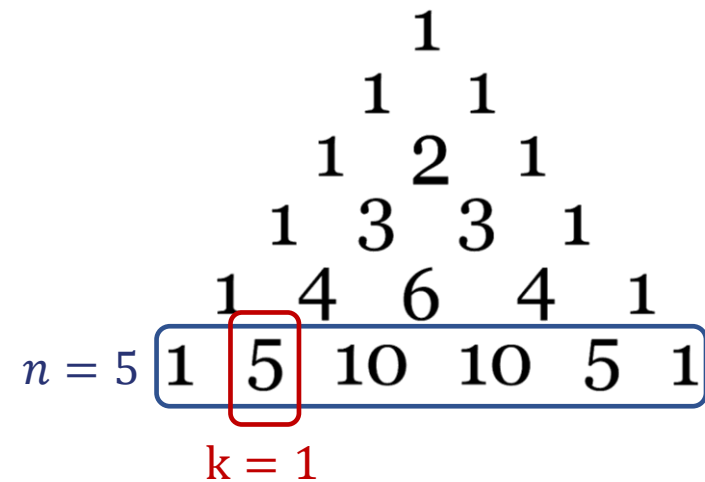
On peut le retrouver facilement grâce au **Triangle de Pascal** :

Binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Le binôme de Newton permet alors de calculer $(a + b)^n$ grâce à la relation :

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exemple : $(a + b)^4 = 1a^0b^4 + 4a^1b^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b^1 + 1a^4b^0$



Exemple : $\binom{5}{1} = 5$

Racine carrée

Définition

Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, on note $\sqrt{a}$ le réel **positif** dont le carré est a . Autrement dit : $(\sqrt{a})^2 = a$

Remarques

- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
- L'équation $x^2 = a$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$: $x = \sqrt{a}$ et $x = -\sqrt{a}$

Propriétés

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$, on a :

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Attention : $\sqrt{a+b}$ n'est **PAS** égal à $\sqrt{a} + \sqrt{b}$!!

Valeur absolue

Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$. La valeur absolue de x , notée $|x|$, est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Propriétés

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

- $|-x| = |x|$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $|xy| = |x| \times |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ si $y \neq 0$
- $|x - y| = |y - x|$ (C'est la distance entre x et y)
- $|x + y| \leq |x| + |y|$

Exemple

On veut écrire $|2x - 4|$ sans la valeur absolue.

- On cherche dans un premier temps pour quelle valeur de x , $2x - 4$ s'annule.

$$\text{On a : } 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

- Donc $|2x - 4| = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x \geq 2 \\ -2x + 4 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

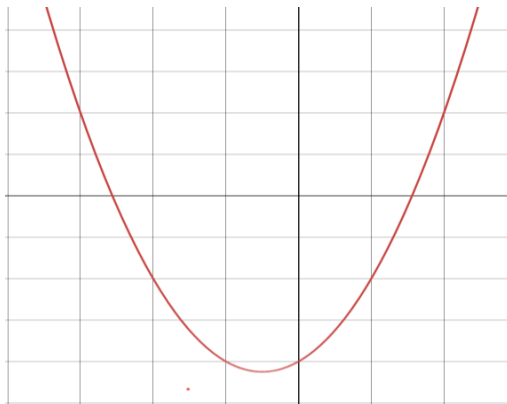
II – POLYNÔMES DU 2nd DEGRÉ DANS $\mathbb{R}$

Généralités

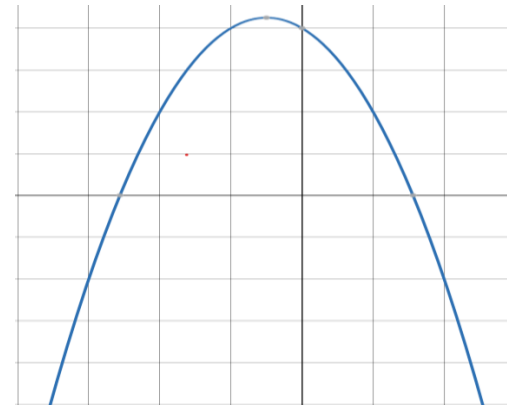
Un polynôme du 2nd est de la forme : $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

La représentation graphique d'un polynôme du 2nd degré est une parabole orientée :

Vers le haut, si $a > 0$



Vers le bas, si $a < 0$



Exemples

$$f(x) = 3x^2 - 7x + 3 \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{3}{5}$$

Polynômes du 2nd degré

$$h(x) = 7x + 3 \quad g(x) = 5x^3 + 12x^2 + 5x + 2$$

Pas polynômes du 2nd degré

Forme canonique

Définition

Tout polynôme du 2^{nd} degré f , défini sur $\mathbb{R}$, peut s'écrire sous la forme :

$$P(x) = a(x - \alpha)^2 - \beta$$

Comment déterminer la forme canonique d'un polynôme du 2^{nd} degré

- Première méthode : en utilisant une formule.

Si $f(x) = ax^2 + bx + c$ alors on a : $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$



Ne pas confondre a et α !

Exemple : On cherche la forme canonique de $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

On a : $a = 3$ $b = -5$ et $c = 2$

On en déduit : $\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{6}$ et $\beta = \frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{1}{12}$.

La forme canonique de f est donc $f(x) = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{1}{12}$.

- Deuxième méthode : La méthode de complétion du carré.

L'idée est d'utiliser l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ en choisissant a et b de telle sorte que $a^2 + 2ab + b^2$ « ressemble » à notre polynôme. Ensuite on ajoute, ou soustrait, une constante pour trouver la forme canonique.

Exemple 1 : On cherche la forme canonique de $f(x) = x^2 - 14x + 8$

- On remarque que $(x - 7)^2 = x^2 - 14x + 49$
- Donc $f(x) = (x - 7)^2 - 49 + 8$
- La forme canonique de f est donc $f(x) = (x - 7)^2 - 41$

Exemple 2 : On cherche la forme canonique de $f(x) = -4x^2 + 6x - 13$

- Comme $a = -4 \neq 1$, On factorise par -4 : $f(x) = -4 \left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{13}{4} \right)$
- On remarque que $\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$
- Donc $f(x) = -4 \left(\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{13}{4} \right) = -4 \left(\left(x - \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{43}{16} \right) = -4 \left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{43}{4}$
- La forme canonique de f est donc $f(x) = -4 \left(x - \frac{3}{4} \right)^2 - \frac{43}{4}$

A quoi sert la forme canonique d'un polynôme du 2nd degré ?

- Etudions les variations du polynôme $f(x) = x^2 - 14x + 8$

On sait que la forme canonique de f est $f(x) = (x - 7)^2 - 41$

De plus, $(x - 7)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 7)^2 - 41 \geq -41 \Leftrightarrow f(x) \geq -41$

Donc f admet un minimum égal à -41 atteint en $x = 7$.

On peut donc tracer le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	7	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-41	$+\infty$



Propriétés

Si un polynôme du 2nd degré $f(x)$ est écrit sous sa forme canonique $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ alors :

- β est l'extremum (maximum ou minimum) du polynôme
- α est la valeur de x pour laquelle cet extremum est atteint

Forme factorisée

Définition

On appelle **discriminant** du polynôme f le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$

C'est un outil essentiel pour résoudre l'équation $f(x) = 0$. Les solutions de cette équation sont appelées les **racines** du polynôme.

Propriétés

- Si $\Delta > 0$, alors f admet deux racines distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, alors f admet une unique racine double : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, alors f n'admet pas de racines réelles.

Forme factorisée

La forme factorisée de f est alors :

- Si $\Delta > 0$, alors $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = a(x - x_0)^2$
- Si $\Delta < 0$, alors f ne peut pas se factoriser dans $\mathbb{R}$.

A quoi sert la forme factorisée d'un polynôme du 2nd degré ?

On souhaite étudier le signe du polynôme : $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$

On résout en premier $f(x) = 0$. On a $\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times (-1) = 1$

Ainsi f possède deux racines : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 1$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1}{2}$

On peut donc factoriser f : $f(x) = -2(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Le tableau de signe de f est donc :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$x - \frac{1}{2}$	-	○	+	+
$x - 1$	-	-	○	+
$f(x)$	-	○	+	○

III – INÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

Inéquation avec un produit

On souhaite résoudre l'inéquation (E) : $(x - 5)(x - 2) < (x - 5)(2x - 3)$.

- On soustrait l'inéquation par le membre de droite : $(E) \Leftrightarrow (x - 5)(x - 2) - (x - 5)(2x - 3) < 0$
- On factorise : $(E) \Leftrightarrow (x - 5)[(x - 2) - (2x - 3)] < 0 \Leftrightarrow (x - 5)(-x + 1) < 0$
- On peut maintenant déterminer le tableau de signe :

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$
$x - 5$	-	-	0	+
$-x + 1$	+	0	-	-
(E)	-	0	+	-

- Les solutions de l'inéquations (E) sont donc : $S =] - \infty ; 1[\cup] 5 ; +\infty[$

Inéquation avec un quotient

On souhaite résoudre l'inéquation (E) : $\frac{2}{x-2} < 3$

- On soustrait l'inéquation par le membre de droite et on réduit au même dénominateur :

$$(E) \Leftrightarrow \frac{2}{x-2} - 3 < 0 \Leftrightarrow \frac{-3x+8}{x-2} < 0$$

- On peut maintenant déterminer le tableau de signe :

x	$-\infty$	2	$\frac{8}{3}$	$+\infty$
$-3x+8$	+	+	0	-
$x-2$	-	0	+	+
(E)	-	+	0	-

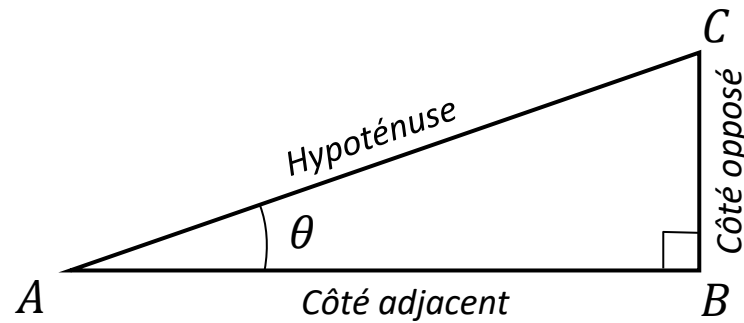
- Les solutions de l'inéquations (E) sont donc : $S =]-\infty ; 2[\cup]\frac{8}{3} ; +\infty[$

IV – TRIGONOMÉTRIE

Définitions

Sinus, Cosinus et Tangente :

On considère un triangle ABC rectangle en B . On note $\theta = (\widehat{AB}, \widehat{AC})$



On note :

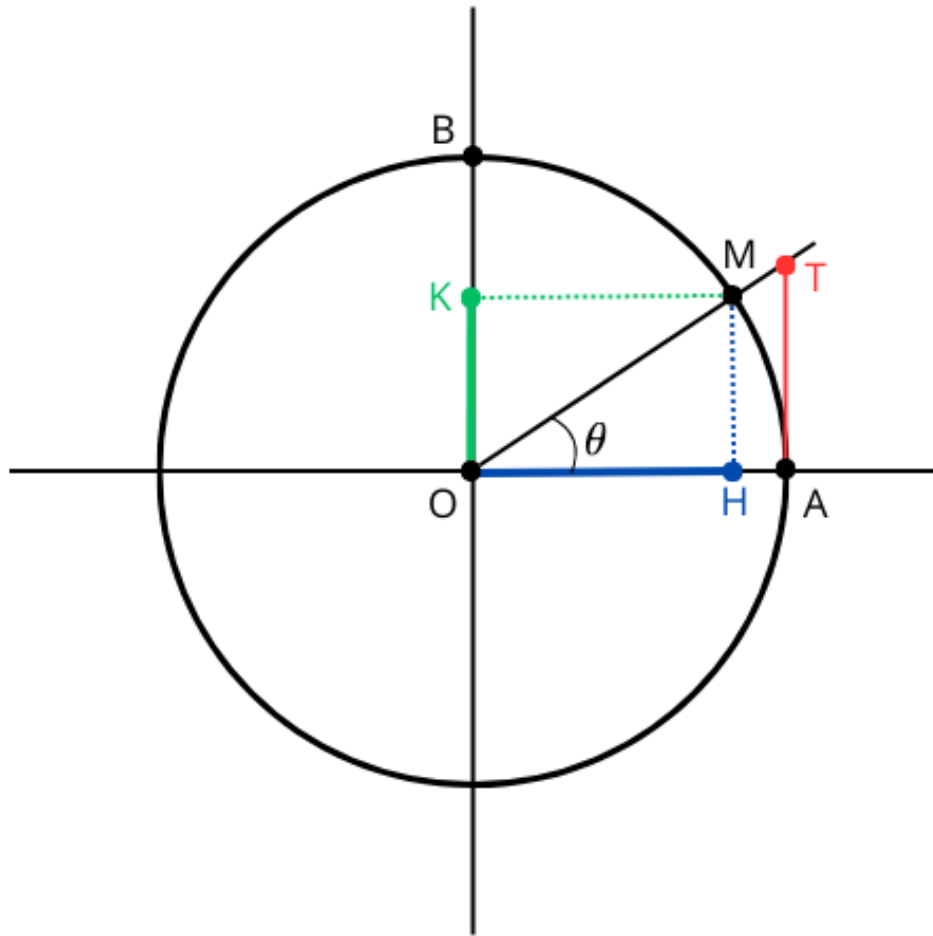
$$\sin(\theta) = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos(\theta) = \frac{AB}{AC}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Cercle trigonométrique

On considère maintenant le cercle de centre O et de rayon 1.



On a :

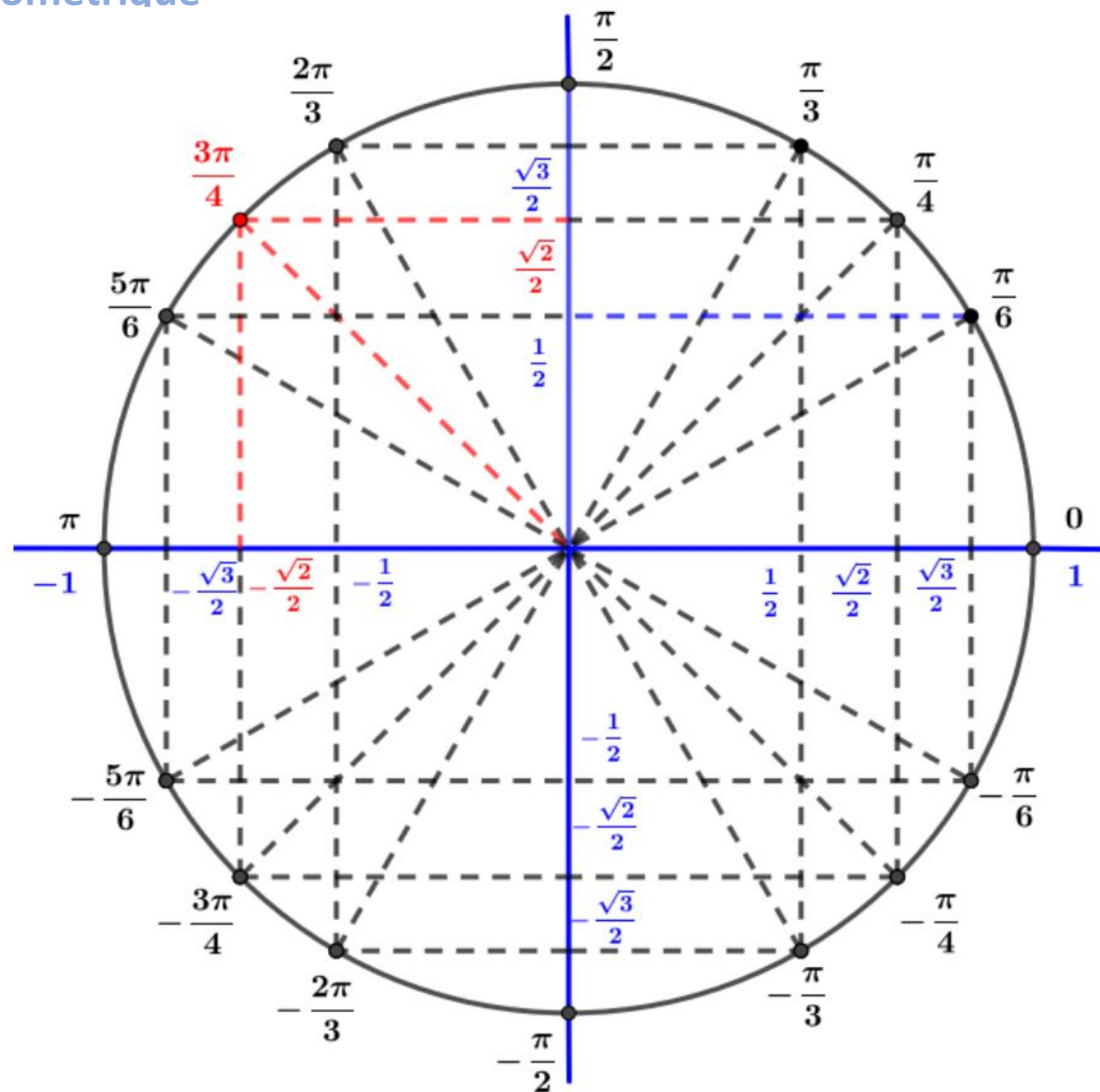
- $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OM} = 1$
- $\cos(\theta) = \overline{OH}$
- $\sin(\theta) = \overline{OK}$
- $\tan(\theta) = \overline{AT} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$

Les coordonnées de M sont donc : $(\cos(\theta), \sin(\theta))$

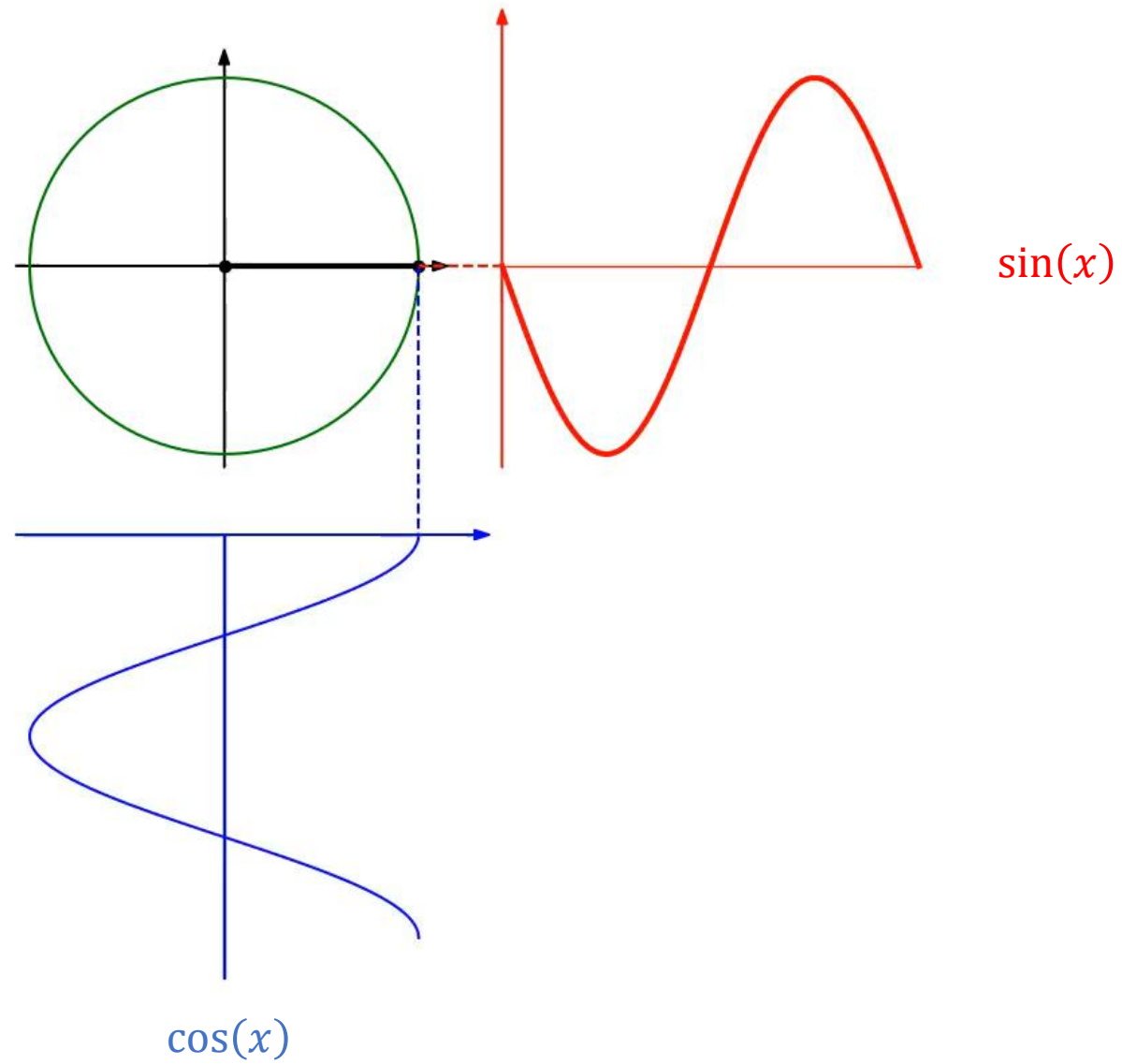
De plus : $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$

A retenir !!

Cercle trigonométrique



Les fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$



Formules importantes

Formules de symétries et de rotations

- $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$
- $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$
- $\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta)$ $\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin(\theta)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos(\theta)$

Ne pas s'angoisser, ces formules peuvent se retrouver soit sur le cercle trigonométrique, soit à l'aide des nombres complexes !

Formules d'addition

- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$

V – NOMBRES COMPLEXES

Introduction

Un (tout) petit peu d'histoire

- ❑ Vers le milieu du XVI^e siècle, des mathématiciens italiens comme Cardan et Bombelli se heurtent à un problème : certaines équations du second degré, par exemple $x^2 = -1$, ne possèdent pas de solution dans les nombres connus à l'époque.

Pour avancer, ils introduisent une nouvelle entité, notée $\sqrt{-1}$, qui n'est ni positive ni négative, et commencent à l'intégrer dans leurs calculs algébriques.

- ❑ Au fil du temps, cette idée se diffuse. En 1637, Descartes parle de ces objets mathématiques en les baptisant « quantités imaginaires ». Mais en 1774, Euler remarque que la notation avec le signe de la racine carrée crée des incohérences. Par exemple :

$$\sqrt{-1} * \sqrt{-1} = \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

ce qui contredit la relation $(\sqrt{-1})^2 = -1$.

- ❑ Pour éviter toute confusion, il remplace la notation $\sqrt{-1}$ par la lettre i . Cette manière d'écrire, reprise par Gauss en 1831, finira par s'imposer, et l'on réserve depuis le symbole $\sqrt{}$ aux racines carrées de nombres réels positifs.

De façon un peu plus formel cela signifie que si l'on considère l'équation (E) : $x^2 = -1$, dans $\mathbb{R}$, il n'y a aucune solution, donc $S = \emptyset$

Or, on souhaite malgré tout imaginer un nombre dont le carré soit égal à -1 . On note i ce nombre.

On a alors : $i^2 = -1$

De même, on a aussi nécessairement : $(-i)^2 = ((-1) * i)^2 = (-1)^2 \times i^2 = -1$

Ainsi, les solutions de l'équation (E) sont i et $-i$.

Définitions et propriétés algébriques

Définition

L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$ des éléments $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$

En particulier :

- Si $a = 0$ et $b = 1$, on retrouve le nombre i .
- Si $b = 0$ alors $z = a$, donc z est un nombre réel.
- Si $a = 0$ alors $z = ib$, donc z est un **imaginaire pur**.

L'écriture $z = a + ib$ est appelée la **forme algébrique** du nombre complexe z .

- a est la partie réelle de z , on note $a = \operatorname{Re}(z)$
- b est la partie imaginaire de z , on note $b = \operatorname{Im}(z)$

Exemple :

$z = 1 + 2i$ est un nombre complexe tel que $\operatorname{Re}(z) = 1$ et $\operatorname{Im}(z) = 2$



Il n'y a plus de i !

Propriétés algébrique des nombres complexes

- ❑ Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
- ❑ L'addition et la multiplication de nombres complexes suivent les mêmes règles de calcul que celles connues dans $\mathbb{R}$

Exemple : Soient $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = -4 - 3i$

$$\text{On a } z_1 + z_2 = 2 + 3i - 4 - 3i = (2 - 4) + (3 - 3)i = -2$$

$$\begin{aligned}\text{Et : } z_1 \times z_2 &= (2 + 3i)(-4 - 3i) \\ &= 2 \times (-4) + 2 \times (-3i) + 3i \times (-4) + 3i \times (-3i) \\ &= -8 - 6i - 12i + 9 \\ &= 1 - 18i\end{aligned}$$

- ❑ Le **conjugué** d'un nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe, noté $\bar{z} = a - ib$

Exemple : Le conjugué de $z = -1 + 8i$ est $\bar{z} = -1 - 8i$

□ L'**inverse** d'un nombre complexe $z = a + ib$ est le nombre complexe $\frac{1}{z}$

Exemple : Soit $z = 3 - 5i$

On calcule $\frac{1}{z} = \frac{1}{3-5i}$. Ici on voit apparaître i au dénominateur. Or, pour obtenir une forme algébrique, on souhaite que i soit au numérateur. Donc, pour retrouver la forme algébrique, on fait intervenir le conjugué du numérateur.

$$\text{On a donc : } \frac{1}{z} = \frac{1}{3-5i} = \frac{3+5i}{(3-5i)(3+5i)} = \frac{3+5i}{3^2+5^2} = \frac{3}{34} + \frac{5}{34}i$$

□ Le **quotient** de deux nombres complexes z_1 et z_2 , avec z_2 non nul, est donc : $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{z_2}$.

Exercice : Soient $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = -7 + 2i$

Déterminer la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$!

Représenter géométriquement un nombre complexe

Un nombre complexe est constitué de deux nombres réels a et b . On peut donc l'interpréter comme un couple de coordonnées, ce qui permet de le représenter par un point dans le plan.

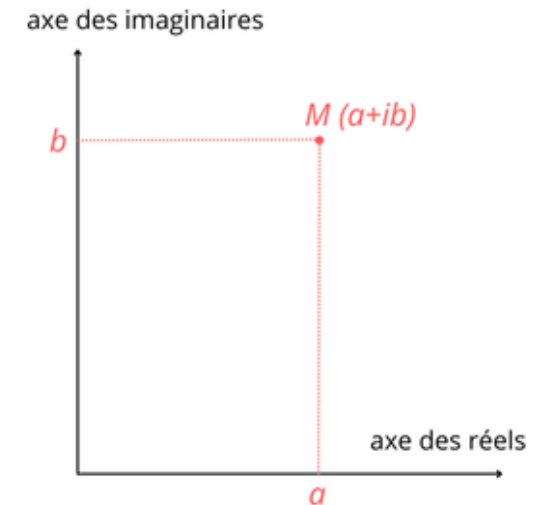
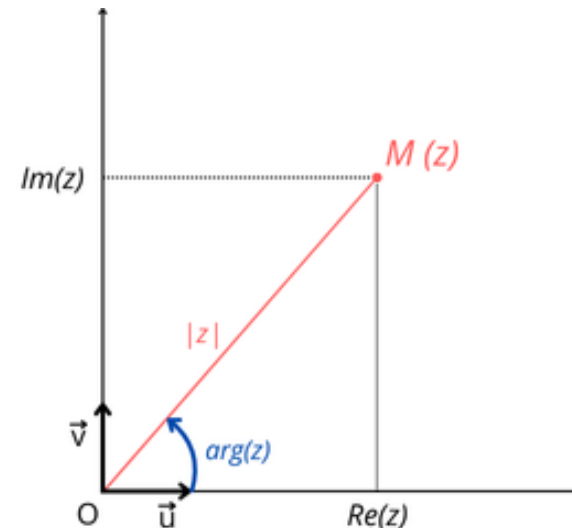
Dans cette représentation, le plan réel devient le plan complexe : l'axe des abscisses correspond à l'axe des réels, tandis que l'axe des ordonnées correspond à l'axe des imaginaires.

On dit alors que $z = a + ib$ est **l'affixe** du point M .

En conséquence, la distance entre l'origine et M est : $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$

Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ d'affixe M , on définit :

- Le **module** de z : $|z| = OM$
- Un **argument** de z : $\arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$



Formes trigonométrique et exponentielle

Forme trigonométrique

Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ avec :

- $r = |z|$ le module de z .
- $\theta = \arg(z)$ un argument de z .

C'est la **forme trigonométrique** de z .

Exemple : Soit $z = 1 + i$. Déterminons sa forme trigonométrique.

On détermine en 1^{er} le module de z : $|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Ensuite, l'argument de z . On a $z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)$

On cherche donc θ tel que :
$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}. \text{ Donc } \arg(z) = \frac{\pi}{4} + (2k\pi, k \in \mathbb{N})$$

La forme trigonométrique de z est donc $z = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$

Forme exponentielle

Retour sur la fonction exponentielle : La fonction exponentielle, notée $\exp(x)$ ou e^x est la seule fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui transforme une somme en produit et qui prend pour valeur : $e^1 = e$ et $e^0 = 1$.

Avec $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} e^{a+b} &= e^a \times e^b & e^{-a} &= \frac{1}{e^a} \\ e^{a-b} &= \frac{e^a}{e^b} & (e^a)^b &= e^{a \times b} \end{aligned}$$

Forme exponentielle d'un nombre complexe : Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Ainsi, $z = a + ib = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = re^{i\theta}$

Exemple : On peut écrire $z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}}$

Les formules d'Euler

Comme $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ alors $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$

On remarque alors que $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos(\theta)$ et $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin(\theta)$

On en déduit ainsi les (très importantes) **formules d'Euler** :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Exemple d'application : Exprimer $\cos^2(\theta)$ et $\sin^2(\theta)$ en fonction de $\cos(2\theta)$.

(On dit qu'on *linéarise* $\cos^2(\theta)$ et $\sin^2(\theta)$)

Grâce aux formules d'Euler, on a :

$$\cos^2(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 = \frac{(e^{i\theta})^2 + 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + (e^{-i\theta})^2}{2^2} = \frac{2 + e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{4} = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$$

Et pour $\sin^2(\theta)$, c'est à vous de jouer !

La formule de Moivre

Comme $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ alors :

$$(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Cette dernière égalité est appelée **formule de Moivre**.

Exemple d'application : Exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Par la formule de Moivre, on a : $\cos(3\theta) + i \sin(3\theta) = (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^3$

Ensuite, le binôme de Newton nous donne : $(\cos(\theta) + i \sin(\theta))^3 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} \cos(\theta)^{3-k} \times (i \sin(\theta))^k$

En développant, on obtient :

$$\cos(3\theta) + i \sin(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) + i(3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \sin^3(\theta))$$

Par identification, on déduit :

$$\begin{cases} \cos(3\theta) = \cos^3(\theta) - 3 \cos(\theta) \sin^2(\theta) \\ \sin(3\theta) = 3 \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \sin^3(\theta) \end{cases}$$

Equations polynômiales dans $\mathbb{C}$

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions :

Soit $\Delta = b^2 + 4ac$ le discriminant de l'équation.

- Si $\Delta \geq 0$ alors les deux solutions sont réelles : $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta < 0$ alors les deux solutions sont des nombres complexes conjugués :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Exemple : Résoudre l'équation $z^2 - 2z + 5 = 0$ dans $\mathbb{C}$

On calcule $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$

Les solutions sont donc :

$$z_1 = \frac{2 - i\sqrt{16}}{2} = 1 - 2i \text{ et } z_2 = \frac{2 + i\sqrt{16}}{2} = 1 + 2i$$