

COURS DE MECANIQUE DU POINT

OUTILS MATHÉMATIQUES

□ Grandeur scalaire et grandeur vectorielle

Une quantité physique peut se présenter sous deux natures différentes :

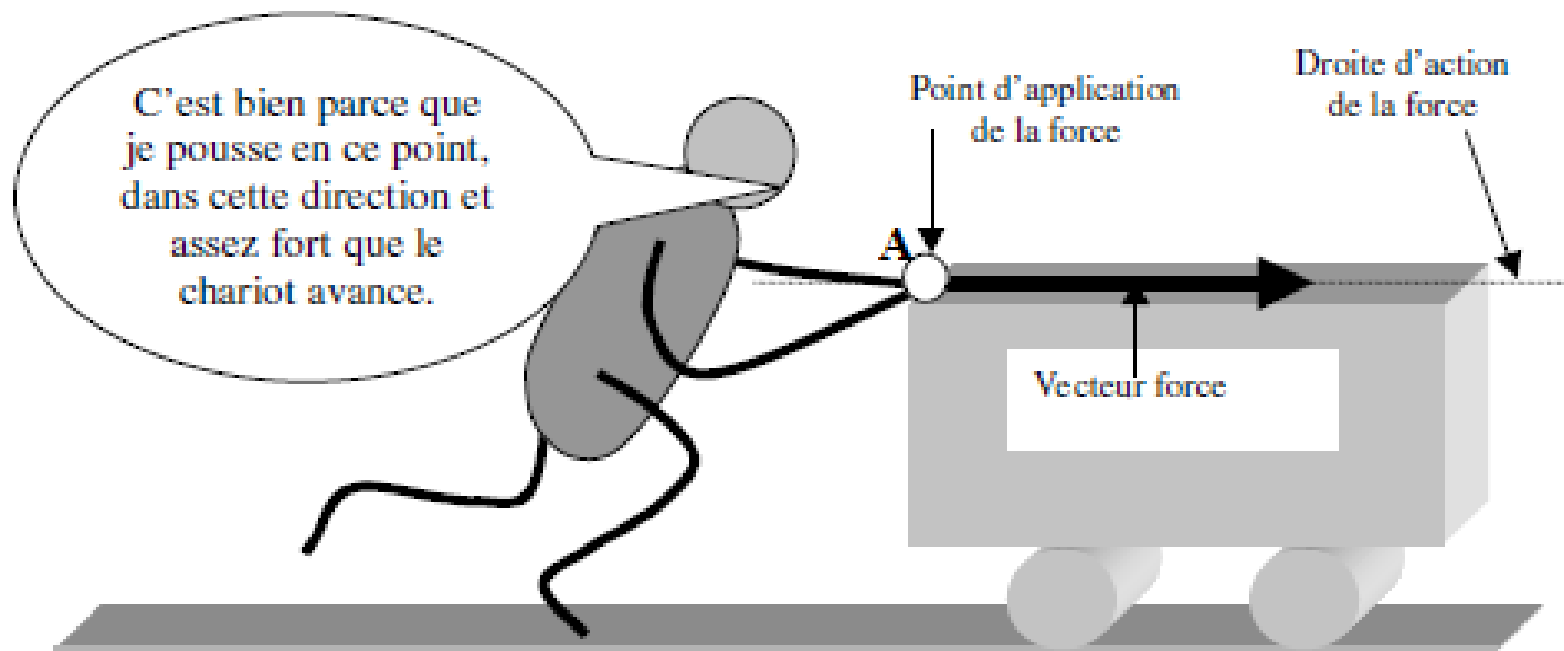
➤ Grandeur scalaire

Généralement un nombre affecté d'une unité comme la masse m d'un corps, la longueur l d'un objet, l'énergie E d'un système, la charge électrique q ...

➤ Grandeur vectorielle

différente de la grandeur scalaire, est définie que si l'on prend soin de préciser la direction, le sens, le point d'application et l'intensité de leur action. Géométriquement, elle est représentée par un vecteur ayant la même direction, le même sens et un module mesuré en choisissant une unité graphique correspondante, c'est-à-dire l'échelle.

Ex : la vitesse $\vec{v}$ et le poids $\vec{p}$ d'un corps



Le déplacement du chariot est dû à la force de poussée exercée par sery :

Origine : point d'application **A** de la force

Direction : horizontale

Sens : de la gauche vers la droite

Norme : 6 N pour une échelle de 1 cm $\rightarrow$ 2 N (graphiquement la force mesure 3 cm)

Une force $\vec{F}$, de valeur 100 N, fait un angle de 40° sur un plan incliné de 20° .

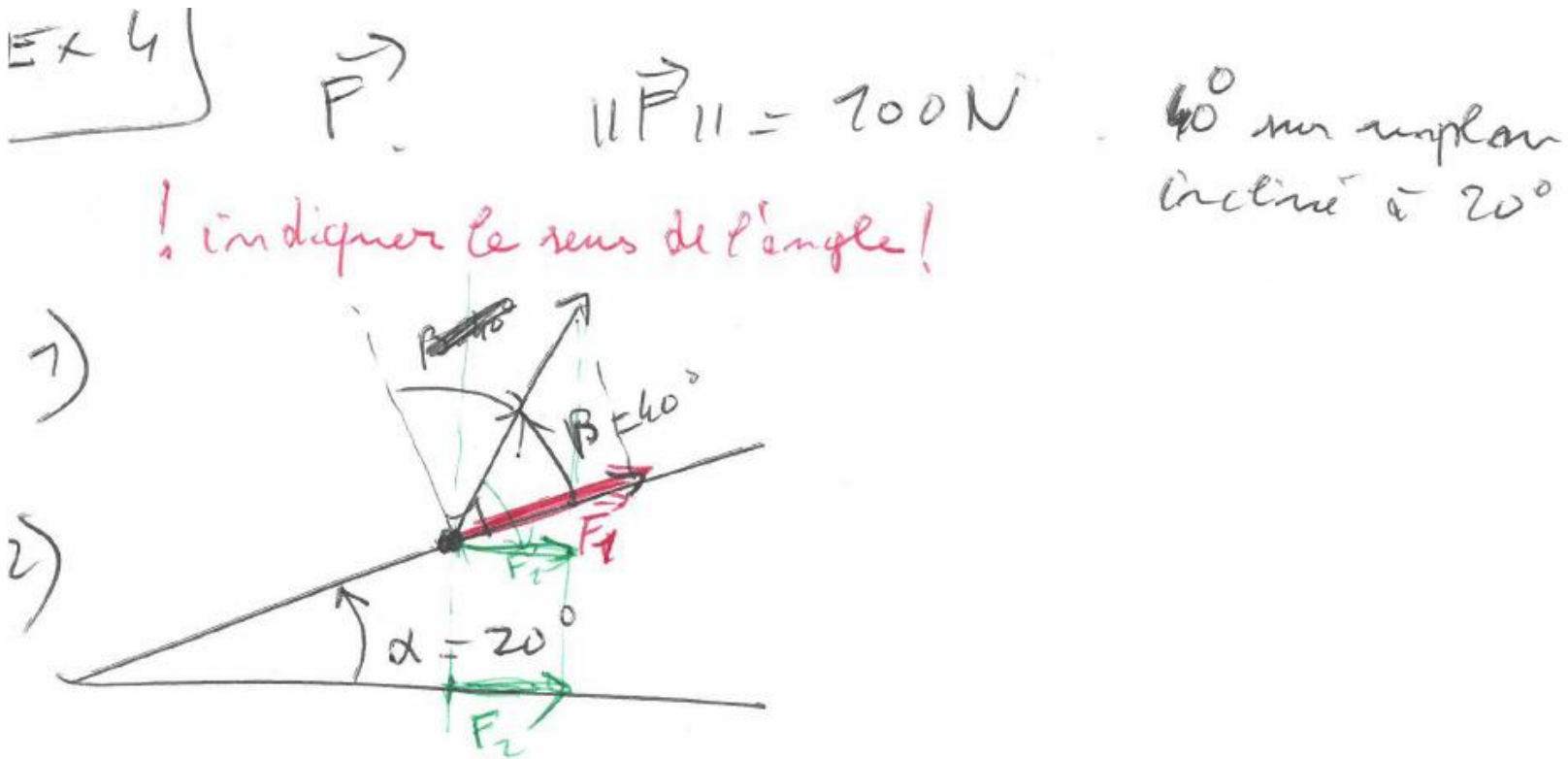
Quelle est la projection de la force : 1) sur l'axe du plan incliné

2) sur l'axe horizontal ?

Une force $\vec{F}$, de valeur 100 N, fait un angle de 40° sur un plan incliné de 20° .

Quelle est la projection de la force : 1) sur l'axe du plan incliné

2) sur l'axe horizontal ?

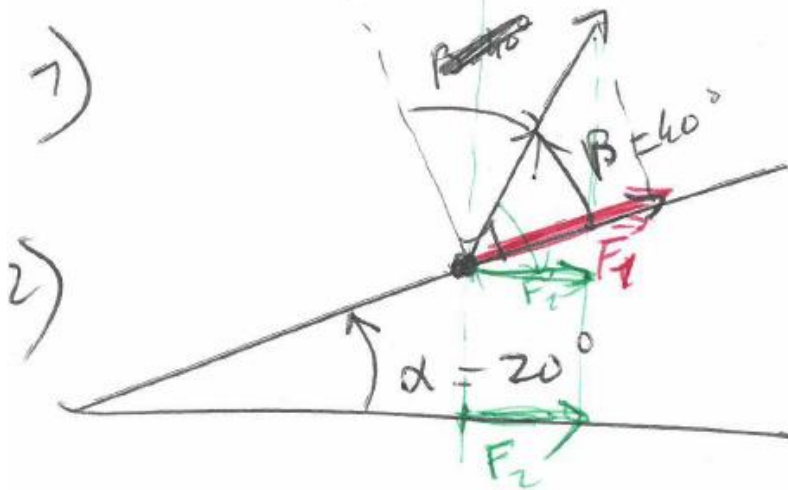


Une force $\vec{F}$, de valeur 100 N, fait un angle de 40° sur un plan incliné de 20° .

Quelle est la projection de la force : 1) sur l'axe du plan incliné

2) sur l'axe horizontal ?

EX 4) $\vec{F}$ $\|\vec{F}\| = 100 \text{ N}$ 40° sur un plan incliné à 20°
! indiquer le sens de l'angle!



$$F_1 = \|\vec{F}\| \cos(40^\circ) = 100 \times \cos 40^\circ = 76,6 \text{ N}$$

$$F_2 = \|\vec{F}\| \cos(40^\circ + 20^\circ) = 100 \times \cos 60^\circ = 50 \text{ N}$$

□ Vecteur

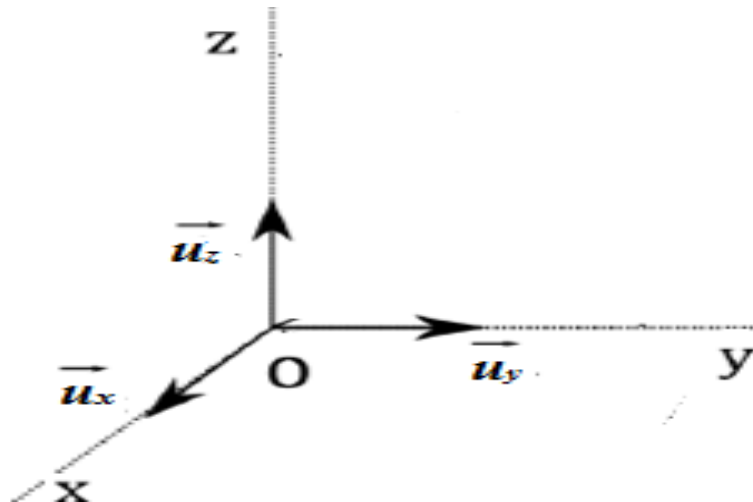
Définition basique d'un repère

Pour localiser un point dans l'espace tridimensionnel il faut utiliser trois axes et une origine O .

L'ensemble constitue le repère.

Les trois axes généralement appelés x , y , z sont matérialisés par trois droites orthogonales entre-elles, munis de vecteurs unitaires $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ orientés positivement.

$(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est la base du repère (Cartésien) (O, x, y, z) .

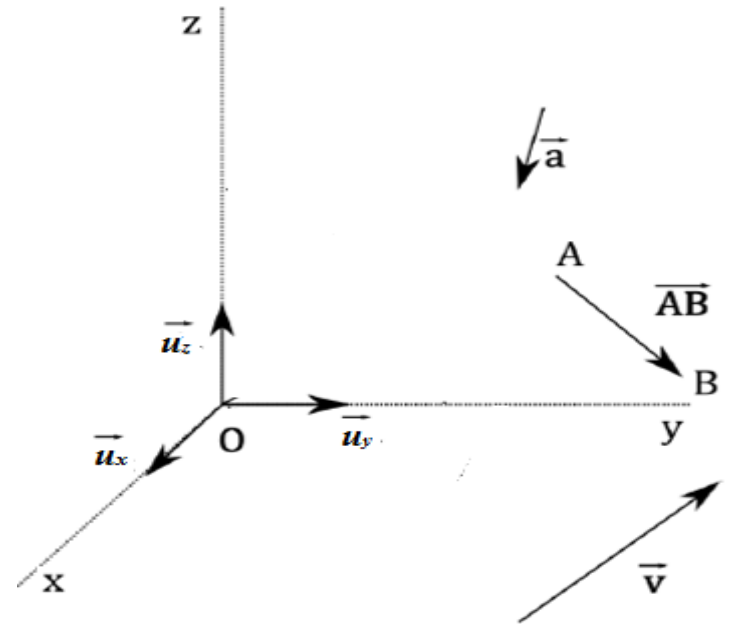


Généralités sur les vecteurs

D'une manière générale, les vecteurs sont des objets mathématiques représentés par des segments orientés (droites munis d'une flèche) ($\vec{v}$ et $\vec{a}$). Cette représentation permet de définir les quatre caractéristiques du vecteur :

- **son origine**
- **sa direction**
- **son sens.**
- **Sa norme** (liée à la taille du segment),

On peut aussi définir un vecteur en traçant la droite reliant deux points de l'espace $\overrightarrow{AB}$



L'écriture mathématique d'un vecteur quelconque $\vec{v}$ dans le repère cartésien se note :

$$\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y + v_z \vec{u}_z \quad \text{ou} \quad \vec{v} \begin{vmatrix} \vec{u}_x \\ \vec{u}_y \\ \vec{u}_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix}$$

- v_x , v_y et v_z sont les composantes du vecteur $\vec{v}$
- La norme (grandeur toujours positive) $\|\vec{v}\|$ se calcule de la façon suivante :

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Vecteur unitaire

Chaque vecteur peut être exprimé en fonction d'un vecteur unitaire qui se différencie du vecteur porteur par son module qui est l'unité :

$$\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \vec{u}$$

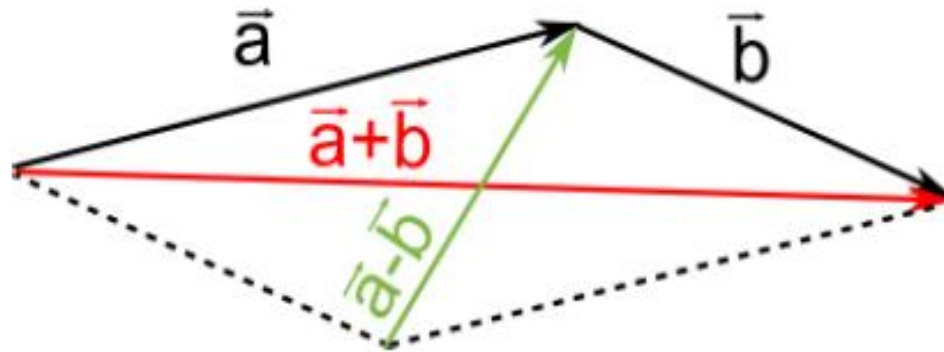
Tel que :

$$\|\vec{u}\| = 1$$

Addition et soustraction de vecteurs

Les vecteurs peuvent s'additionner et se soustraire.

- L'addition de deux vecteurs produit un vecteur correspondant à la grande diagonale du parallélogramme formé par les deux vecteurs à additionner (lorsque ces derniers ont le même "point d'accroche").
- La soustraction de deux vecteurs forme la petite diagonale du parallélogramme.



L'addition et la soustraction de deux vecteurs peuvent aussi être réalisées à partir des coordonnées des vecteurs. Soit :

$$\vec{u} = a\vec{u}_x + b\vec{u}_y + c\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{v} = a'\vec{u}_x + b'\vec{u}_y + c'\vec{u}_z$$



$$\vec{u} + \vec{v} = (a + a')\vec{u}_x + (b + b')\vec{u}_y + (c + c')\vec{u}_z$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (a - a')\vec{u}_x + (b - b')\vec{u}_y + (c - c')\vec{u}_z$$

Propriétés :

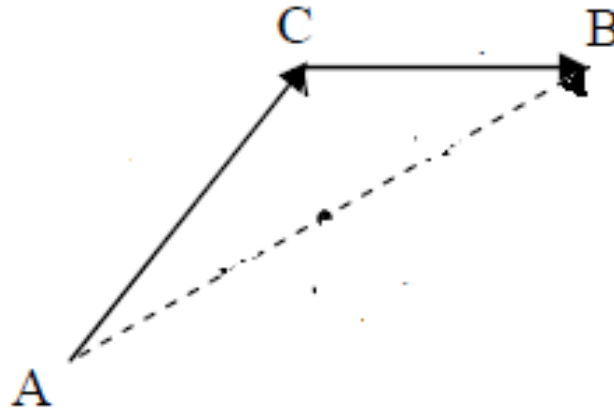
- L'addition est commutative : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- L'addition est distributive : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Relation de Chasles

La relation de Chasles permet de calculer la somme de deux vecteurs, quand l'extrémité du premier vecteur est l'origine du second. Elle s'énonce comme suit :

Pour tous points A, B et C, on a :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$

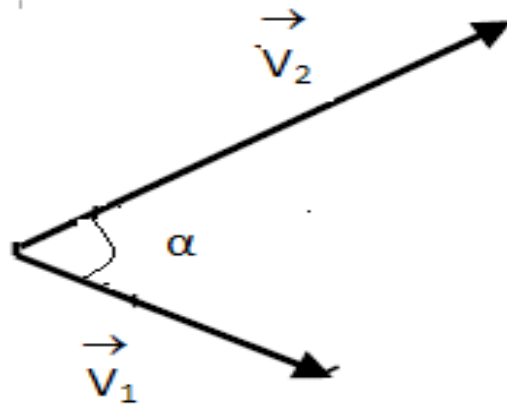


Produit scalaire

Le produit scalaire est une opération mathématique construite à partir de deux vecteurs, et produisant un scalaire. Le produit scalaire des vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$:

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \cos \alpha$$

Où α est l'angle entre les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

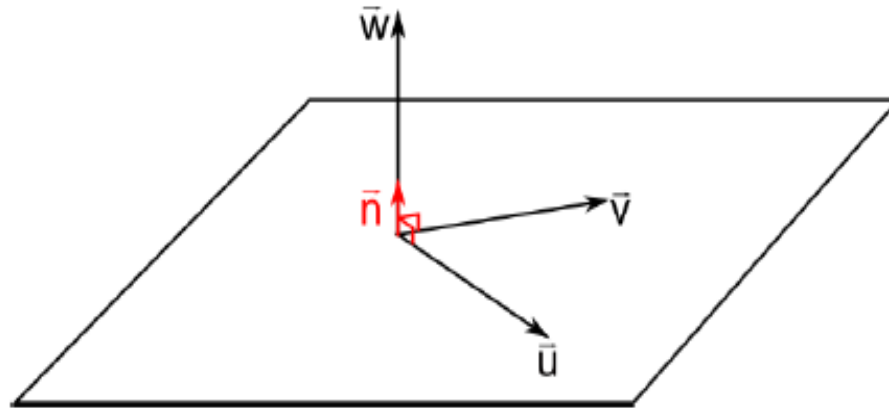


Produit vectoriel

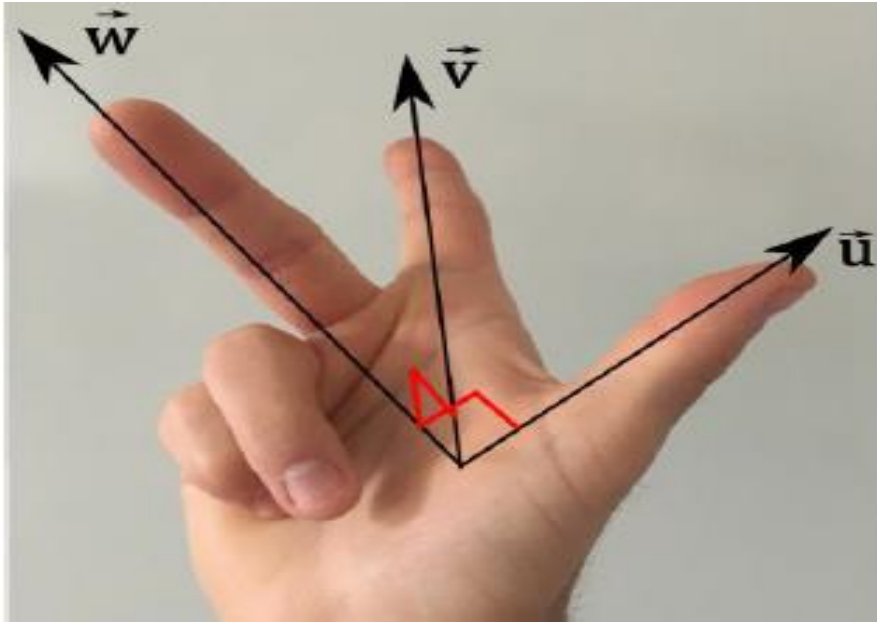
Le produit vectoriel est une opération mathématique construite à partir de deux **vecteurs**, et produisant un autre **vecteur** orienté :

$$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$$

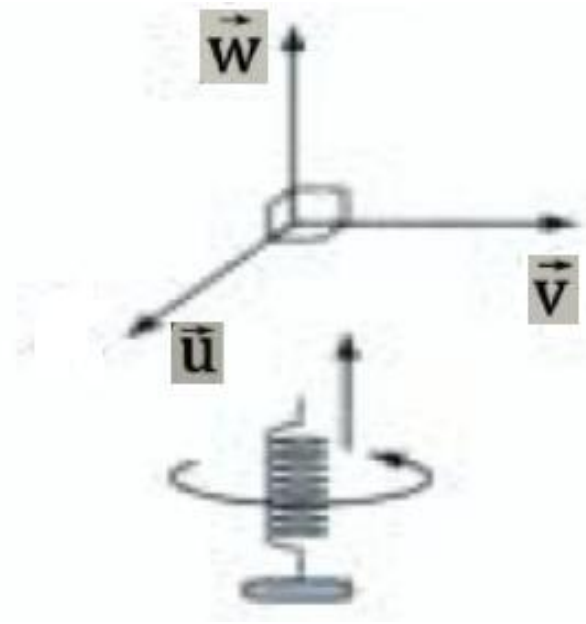
- Le vecteur résultant est orthogonal au plan formé par les vecteurs donnés.



- Le sens est donné par :



la règle des trois doigts de la main droite.



la règle du tire-bouchon

- Sa norme vaut : $\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin\left(\hat{\vec{u}\vec{v}}\right)$

Le produit vectoriel est :

- Non commutatif : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$
- Distributif : $\vec{W} \wedge (\vec{U} + \vec{V}) = \vec{W} \wedge \vec{U} + \vec{W} \wedge \vec{V}$
- Nul : $\vec{U} \wedge \vec{V} = \vec{0}$ si $\begin{cases} \vec{U} \parallel \vec{V} & (\vec{U} \text{ et } \vec{V} \text{ ont la même direction}) \\ \vec{U} = \vec{0} \text{ où } \vec{V} = \vec{0} & (\text{l'un des deux vecteurs est nul}) \end{cases}$

Le produit vectoriel peut être aussi calculé à partir des coordonnées des vecteurs :

$$\vec{U} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \text{ et } \vec{V} \begin{vmatrix} d \\ e \\ f \end{vmatrix}$$

On aura :

$$\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V} = \begin{vmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bf - ce \\ cd - af \\ ae - bd \end{vmatrix}$$

Quelques propriétés des fonctions vectorielles :

$$* \quad \frac{d}{dt} \left(\lambda(t) \vec{A}(t) \right) = \frac{d\lambda(t)}{dt} \vec{A}(t) + \lambda(t) \frac{d\vec{A}(t)}{dt}$$

$$* \quad \frac{d}{dt} \left(\vec{A}(t) \cdot \vec{B}(t) \right) = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \cdot \vec{B}(t) + \vec{A}(t) \cdot \frac{d\vec{B}(t)}{dt}$$

$$* \quad \frac{d}{dt} \left(\vec{A}(t) \wedge \vec{B}(t) \right) = \frac{d\vec{A}(t)}{dt} \wedge \vec{B}(t) + \vec{A}(t) \wedge \frac{d\vec{B}(t)}{dt}$$

On considère, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les 3 vecteurs : $\vec{U} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$,
 $\vec{V} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$ et $\vec{W} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$

- 1) Calculer les composantes ainsi que le module du vecteur $\vec{A} = 2\vec{U} + 3\vec{V} + 2\vec{W}$.
- 2) Déterminer le vecteur unitaire porté par : $\vec{B} = \vec{V} + 4\vec{W}$.
- 3) Calculer le produit $\vec{U} \cdot \vec{W}$ et en déduire l'angle formé par ces deux vecteurs.

$$(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

$$\vec{U} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{V} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{W} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

$$\vec{U} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{V} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{W} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$① \vec{A} = 2\vec{U} + 3\vec{V} + 2\vec{W}$$

$$\vec{A} = \underline{6\vec{i}} - \underline{4\vec{j}} + \underline{2\vec{k}} + \underline{6\vec{i}} + \underline{12\vec{j}} - \underline{9\vec{k}} + \underline{-2\vec{i}} + \underline{10\vec{j}} + \underline{4\vec{k}}$$

$$(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

$$\vec{U} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{V} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{W} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$① \vec{A} = 2\vec{U} + 3\vec{V} + 2\vec{W}$$

$$\vec{A} = \underline{6\vec{i}} - \underline{4\vec{j}} + \underline{2\vec{k}} + \underline{6\vec{i}} + \underline{12\vec{j}} - \underline{9\vec{k}} + \underline{-2\vec{i}} + \underline{10\vec{j}} + \underline{4\vec{k}}$$

$$\vec{A} = 10\vec{i} + 18\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{10^2 + 18^2 + (-3)^2} = \sqrt{100 + 324 + 9} = \boxed{\sqrt{433}}$$

$$(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

$$\vec{U} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{V} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{W} = -\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$1) \vec{A} = 2\vec{U} + 3\vec{V} + 2\vec{W}$$

$$\vec{A} = 6\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k} + 6\vec{i} + 12\vec{j} - 9\vec{k} + (-2\vec{i} + 10\vec{j} + 4\vec{k})$$

$$\vec{A} = 10\vec{i} + 18\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{10^2 + 18^2 + (-3)^2} = \sqrt{100 + 324 + 9} = \sqrt{433}$$

$$2) \vec{B} = \vec{U} + 4\vec{W}$$

$$\vec{B} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k} + (-4\vec{i} + 20\vec{j} + 8\vec{k})$$

$$\vec{B} = -2\vec{i} + 24\vec{j} + 5\vec{k}$$

Vector unitaire $\vec{b} = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}$

$$\textcircled{3} \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 3 \times (-1) + (-2) \times 5 + 1 \times 2 = -3 - 10 + 2 = -11$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = 3 \times (-1) + (-2) \times 5 + 1 \times 2 = -3 - 10 + 2 = -11$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = -11$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = 3 \times (-1) + (-2) \times 5 + 1 \times 2 = -3 - 10 + 2 = -11$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = -11$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = \frac{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{w}\|}{-11} = \frac{(\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}) \times (\sqrt{(-1)^2 + 5^2 + 2^2})}{-11}$$

$$\textcircled{3} \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = 3 \times (-1) + (-2) \times 5 + 1 \times 2 = -3 - 10 + 2 = -11$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = -11$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = \frac{\cancel{\|\vec{u}\|} \cdot \cancel{\|\vec{w}\|}}{\cancel{-11}} = \frac{(\cancel{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}}) \times (\cancel{\sqrt{(-1)^2 + 5^2 + 2^2}})}{\cancel{-11}}$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = \frac{\cancel{\sqrt{14}} \cdot \cancel{\sqrt{30}}}{\cancel{-11}} = \frac{\cancel{\sqrt{420}}}{\cancel{-11}} = \boxed{\frac{-11}{\sqrt{420}}}$$

$$\widehat{\vec{u}, \vec{w}} = \arccos\left(\frac{-11}{\sqrt{420}}\right) = \boxed{122,5^\circ}$$

$y = f(g(x))$, résultat de la composition
suivante :

$$\begin{cases} y = f(u) \\ u = g(x) \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

Où : $\frac{dy}{dx}$ représente la dérivé de y par rapport à x .

$\frac{dy}{du}$ représente la dérivé de y par rapport à u .

$\frac{du}{dx}$ représente la dérivé de u par rapport à x .

$$X(t) = 2l \cos^2 \theta$$

Avec $l = \text{cst}$
et $\Theta = f(t)$

$$X'(t) = \frac{dx}{dt} =$$

$$X(t) = 2l \cos^2 \theta$$

Avec $l = \text{cst}$
et $\Theta = f(t)$

$$X'(t) = \frac{dx}{dt} = -4l f'(t) \cos(f(t)) \sin(f(t))$$

➤ **1 - Objet de la cinématique** : décrire les mouvements des corps sans chercher à les interpréter.

Point matériel : particule « suffisamment petite » pour pouvoir être assimilée à un point repérable par un ensemble de trois coordonnées.

➤ **2 - Référentiel** : un référentiel est un corps solide (c'est-à-dire indéformable), par rapport auquel on se place pour étudier le mouvement d'un point matériel.

Relativité du mouvement

➤ **3 - Repère** : un repère est un système d'un point et de trois axes permettant de repérer un point matériel.

* Repère cartésien (Oxyz)



➤ 2 - Référentiels galiléens :

« On appelle *référentiel galiléen* un référentiel dans lequel le principe d'inertie est vérifié, c'est-à-dire dans lequel un point matériel soumis à une force constamment nulle est caractérisé par un mouvement rectiligne uniforme ou par le repos. »

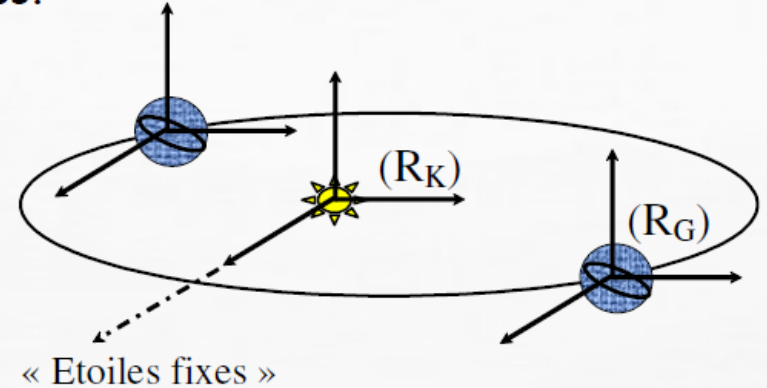
Exemples de référentiels galiléens :

- Référentiel de Kepler : (Héliocentrique)

*** Origine : le centre d'inertie du Soleil

*** Trois axes dirigés vers trois étoiles

lointaines « fixes »



(Référentiel de Copernic : centré sur le centre d'inertie du système solaire)

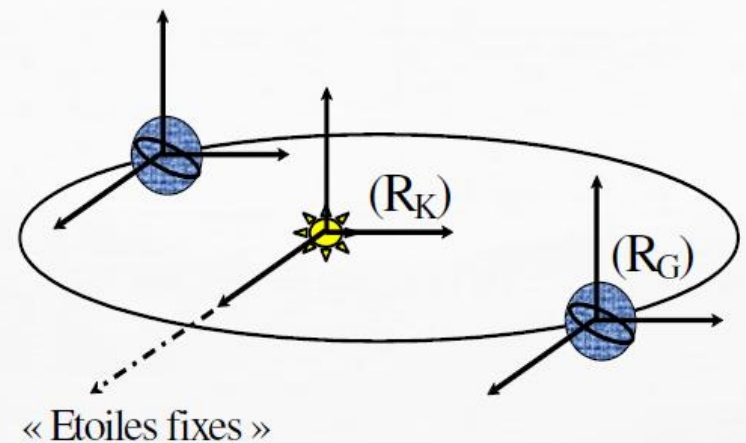
Utilisés pour : - Mouvements des planètes

- Mouvements des sondes interplanétaires



- Référentiel géocentrique :
 - *** Origine : le centre d'inertie de la Terre
 - *** Trois axes dirigés vers trois étoiles lointaines « fixes »
- (R_G) a un mouvement de translation quasi-circulaire par rapport à (R_K) .
- Utilisé pour l'étude des mouvements des satellites autour de la Terre
- Référentiel terrestre (ou du laboratoire) :

En 1^{ère} approximation, ces référentiels sont galiléens.



➤ 4 - Systèmes de coordonnées :

* a - Coordonnées cartésiennes

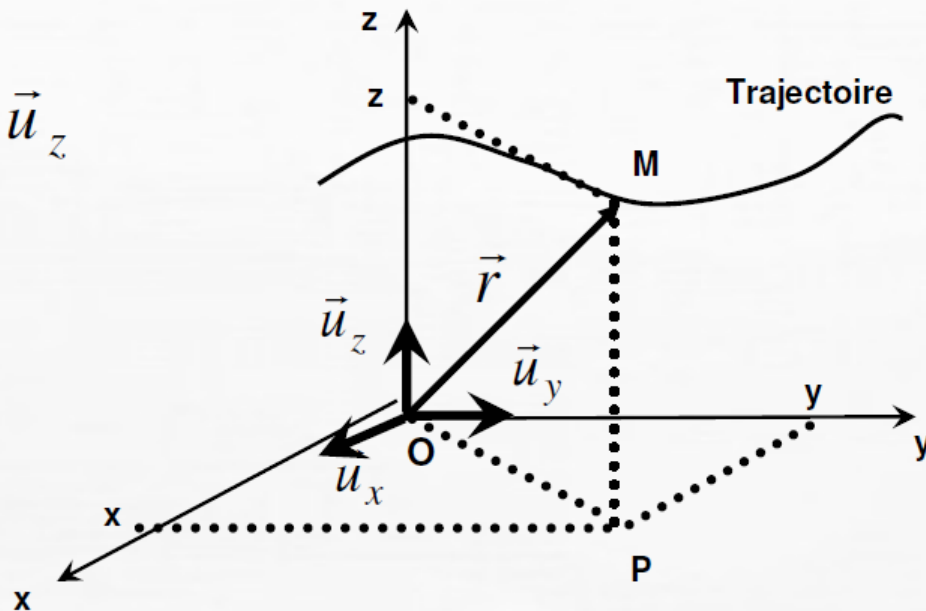
$$\vec{r} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z$$

est appelé rayon vecteur de M.

$(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est une BOND :

$$\vec{u}_x \wedge \vec{u}_y = \vec{u}_z ; \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x$$

$$\vec{u}_z \wedge \vec{u}_x = \vec{u}_y$$



➤ Systèmes de coordonnées :

* b - Coordonnées polaires (mouvements plans uniquement)

r et θ sont les coordonnées polaires de M .

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r \vec{u}_r$$

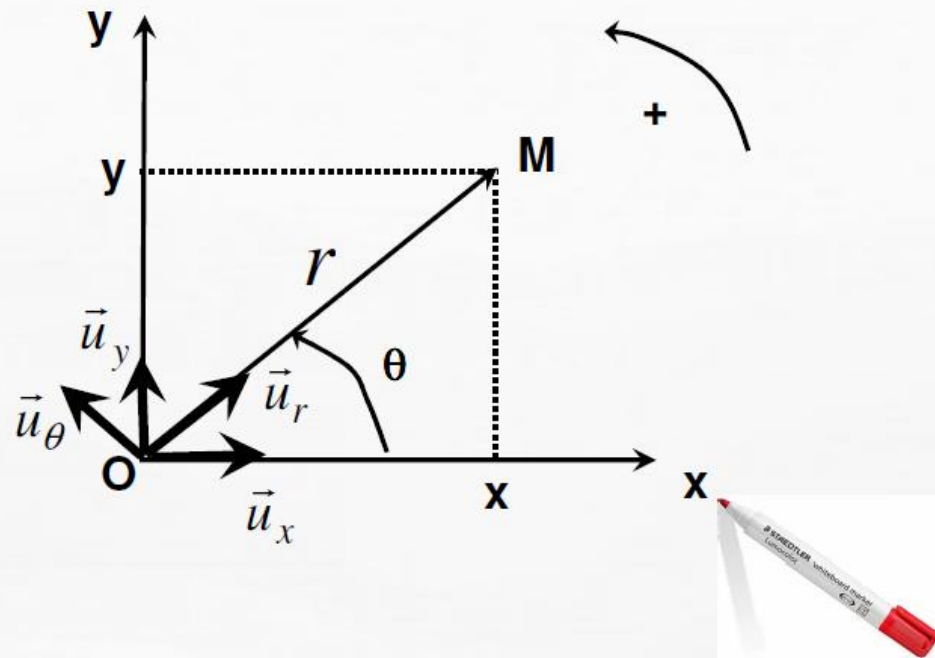
$$\theta \in [0, 2\pi]$$

$$x = r \cos(\theta) \quad ; \quad y = r \sin(\theta)$$

$$\vec{u}_r = \cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin(\theta) \vec{u}_x + \cos(\theta) \vec{u}_y$$

$\vec{u}_\theta$ est directement perpendiculaire à $\vec{u}_r$



$$\vec{u}_r = \cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin(\theta) \vec{u}_x + \cos(\theta) \vec{u}_y$$

$\vec{u}_\theta$ est directement perpendiculaire à $\vec{u}_r$

θ est une fonction du temps, sa dérivé est noté : $\dot{\theta}$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} =$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} =$$

$$\vec{u}_r = \cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin(\theta) \vec{u}_x + \cos(\theta) \vec{u}_y$$

$\vec{u}_\theta$ est directement perpendiculaire à $\vec{u}_r$

θ est une fonction du temps, sa dérivé est noté : $\dot{\theta}$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} =$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} =$$

$$\vec{u}_r = \cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin(\theta) \vec{u}_x + \cos(\theta) \vec{u}_y$$

$\vec{u}_\theta$ est directement perpendiculaire à $\vec{u}_r$

θ est une fonction du temps, sa dérivé est noté : $\dot{\theta}$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = -\sin(\theta) \dot{\theta} \vec{u}_x + \cos(\theta) \dot{\theta} \vec{u}_y$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\cos(\theta) \dot{\theta} \vec{u}_x - \sin(\theta) \dot{\theta} \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_r = \cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin(\theta) \vec{u}_x + \cos(\theta) \vec{u}_y$$

$\vec{u}_\theta$ est directement perpendiculaire à $\vec{u}_r$

θ est une fonction du temps, sa dérivé est noté : $\dot{\theta}$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = -\sin(\theta) \dot{\theta} \vec{u}_x + \cos(\theta) \dot{\theta} \vec{u}_y$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\cos(\theta) \dot{\theta} \vec{u}_x - \sin(\theta) \dot{\theta} \vec{u}_y$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} =$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} =$$

$$\vec{u}_r = \cos(\theta) \vec{u}_x + \sin(\theta) \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\theta = -\sin(\theta) \vec{u}_x + \cos(\theta) \vec{u}_y$$

$\vec{u}_\theta$ est directement perpendiculaire à $\vec{u}_r$

θ est une fonction du temps, sa dérivé est noté : $\dot{\theta}$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = -\sin(\theta) \dot{\theta} \vec{u}_x + \cos(\theta) \dot{\theta} \vec{u}_y$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\cos(\theta) \dot{\theta} \vec{u}_x - \sin(\theta) \dot{\theta} \vec{u}_y$$

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r$$

➤ Systèmes de coordonnées :

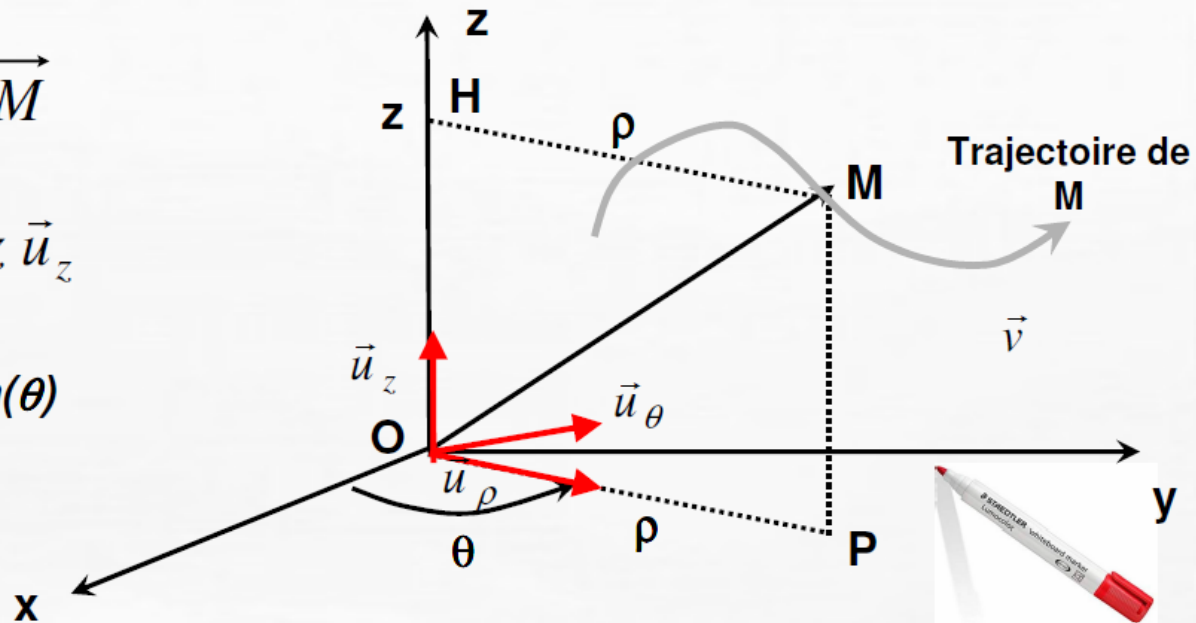
* c - Coordonnées cylindriques : (ρ, θ, z) sont les coordonnées cylindriques de M

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$$

$$x = \rho \cos(\theta) \quad ; \quad y = \rho \sin(\theta)$$

Avec : $\theta \in [0, 2\pi]$



➤ **5 - Le temps** : le temps est une notion absolue, c'est-à-dire indépendante du référentiel d'étude : ainsi, deux observateurs liés à des référentiels différents attribuent les mêmes dates aux mêmes événements.

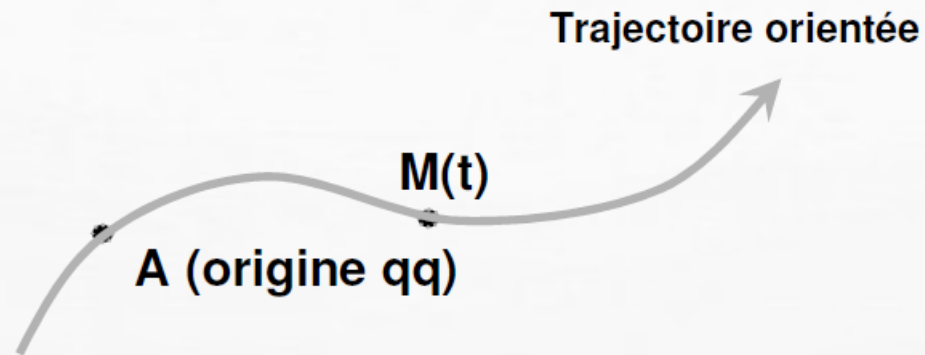
➤ 6 - Trajectoire :

L'ensemble des positions occupées par un mobile en fonction du temps est une courbe appelée trajectoire.

$$s = \overline{AM}$$

est l'abscisse curviligne de M .

La fonction $s = s(t)$ est appelée équation horaire du mouvement

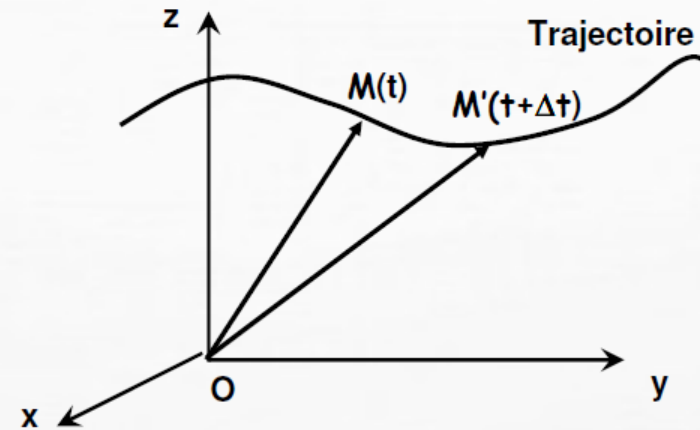


➤ Vecteur vitesse :

La figure précise les notations :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ est le rayon vecteur du point M.



Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire et est dirigé dans le sens du mouvement (d'après la définition même)



➤ **Coordonnées du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :**

Les vecteurs $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ sont indépendants du temps, donc :

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + \frac{dy}{dt} \vec{u}_y + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{y} \vec{u}_y + \dot{z} \vec{u}_z$$

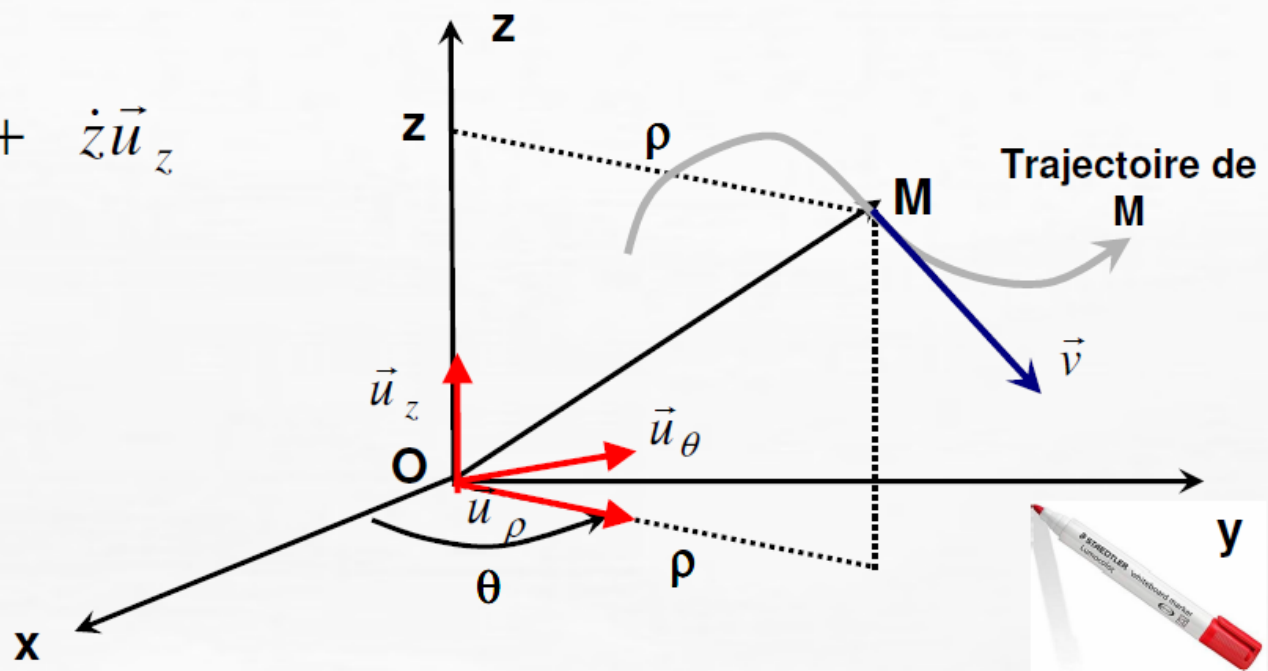
➤ **Coordonnées du vecteur vitesse en coordonnées polaires :**

$$\vec{v} = \underbrace{\dot{r} \vec{u}_r}_{\text{Vitesse radiale}} + \underbrace{r \dot{\theta} \vec{u}_\theta}_{\text{Vitesse orthoradiale}} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r \end{array} \right.$$

➤ Coordonnées du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_\rho \end{array} \right.$$



➤ 8 - Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Le vecteur accélération caractérise le rythme de variation du vecteur vitesse.

➤ En coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{u}_y + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{u}_z = \ddot{x} \vec{u}_x + \ddot{y} \vec{u}_y + \ddot{z} \vec{u}_z$$

➤ En coordonnées polaires et cylindriques :

$$\begin{array}{ccc} \longrightarrow & \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r & + \quad (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{u}_\theta \\ & \underbrace{\hspace{1.5cm}} & \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ & \text{Accélération} & \text{Accélération} \\ & \text{radiale} & \text{orthoradiale} \end{array}$$

$$\longrightarrow \quad \vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \vec{u}_\rho + (\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$$

➤ 9 - Mouvements rectilignes :

La trajectoire est une portion de droite : vecteur vitesse et vecteur accélération sont portés par cette droite, souvent choisie comme axe (Ox) par exemple.

Vecteurs vitesse et accélération dans le même sens : mouvement accéléré

Vecteurs vitesse et accélération en sens contraire : mouvement retardé

Vecteur accélération constant : mouvement uniformément varié (exemple : chute libre où étant l'accélération de la pesanteur ($g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$))

Exemple : mouvement rectiligne sinusoïdal ($x = x_m \cos(\omega t + \varphi)$)

x_m : amplitude du mouvement ; ω : pulsation du mouvement ($\omega = 2\pi/T = 2\pi f$, avec T la période et $f = 1/T$ la fréquence du mouvement) et φ est la phase.



➤ 10 - Mouvements de rotation :

$$r = OM = R = cste$$

θ est fonction du temps ; on note $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$
la vitesse angulaire de M.

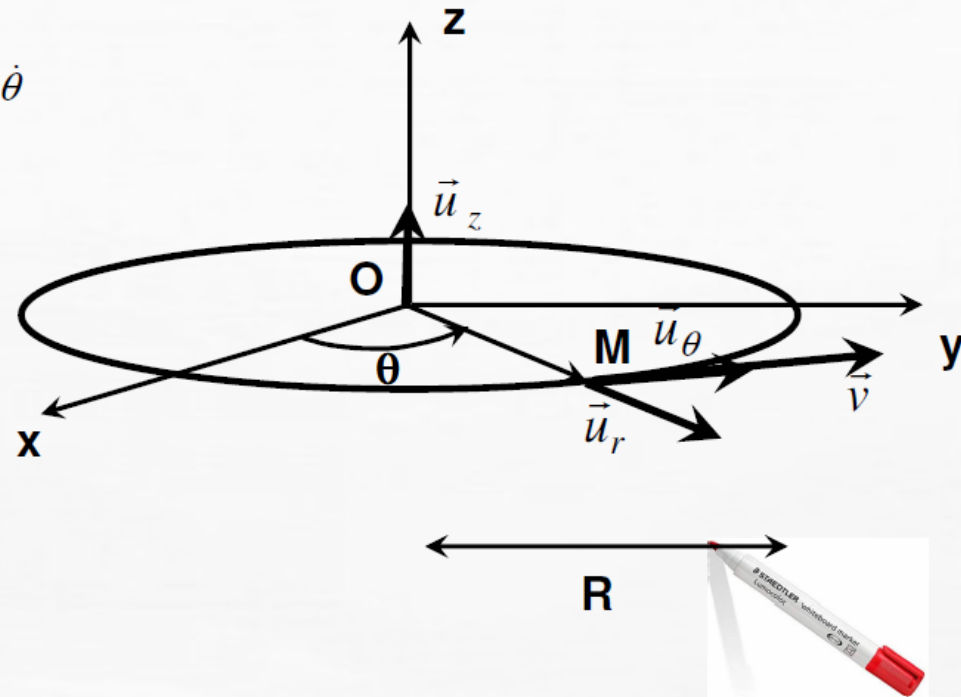
Le mouvement est dit uniforme si :

$$\omega = cste$$

$$\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r + R \dot{\omega} \vec{u}_\theta$$

Mouvement uniforme : $\vec{a} = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r$
(accélération centripète uniquement)



EXEMPLES DE MOUVEMENT

- **Mouvement rectiligne uniforme**

Dans un mouvement rectiligne, la trajectoire est une droite.

Le mouvement rectiligne est dit uniforme lorsqu'il se fait à vitesse constante.

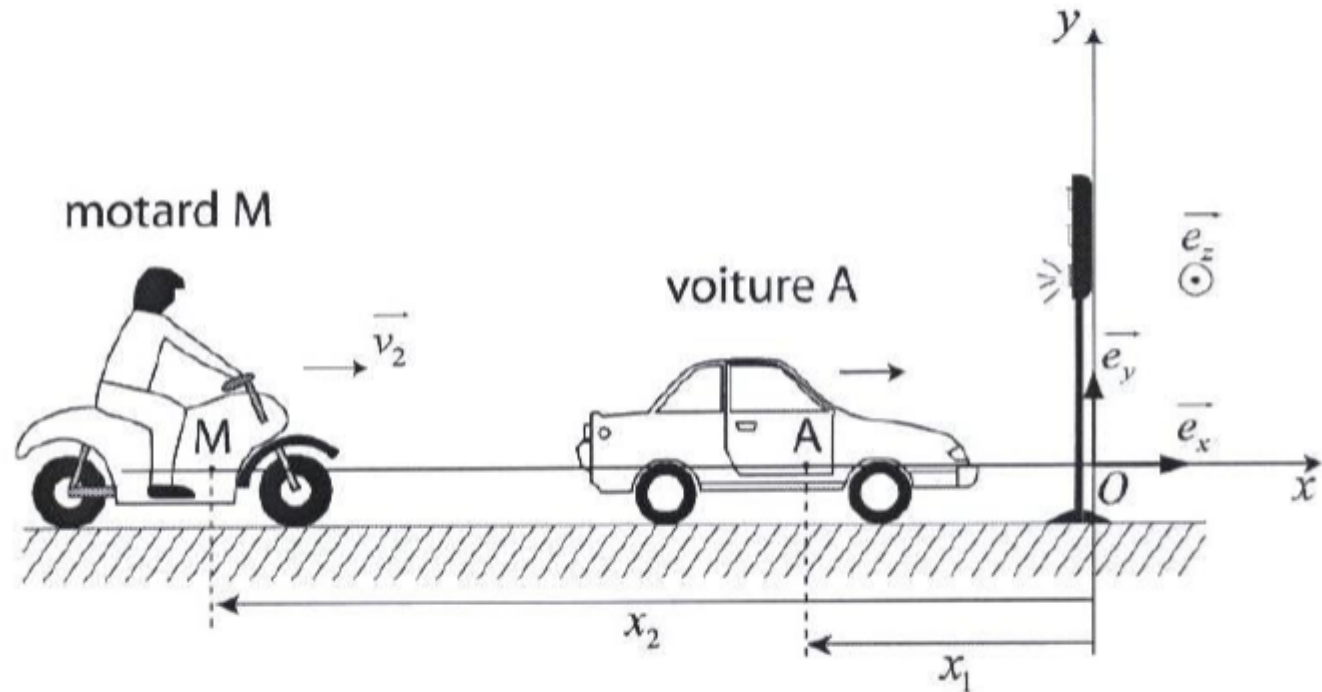
$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 = \textit{cste}$$

L'équation horaire est obtenue à partir de l'expression :

$$\frac{dx}{dt} = V_0 \quad \Rightarrow \quad x = \int V_0 dt = V_0 t + \textit{cste}$$

$$\rightarrow \quad x = V_0 t + x_0$$

Une voiture A est arrêtée sur une route horizontale rectiligne à une distance $d_1=3$ m d'un feu rouge. Lorsque le feu passe au vert, à l'instant $t=0$, la voiture démarre avec une accélération constante $a_1=3$ m/s². Au même moment un motard M roulant à une vitesse constante $v_2=54$ km/h se trouve à une distance $d_2=24$ m de la voiture. La voiture et le motard considérés comme des points matériels sont repérée à l'instant t à l'aide de leurs vecteurs positions respectifs $\overrightarrow{OA} = x_1 \vec{i}$ et $\overrightarrow{OM} = x_2 \vec{i}$. On choisira comme origine O des abscisses la position du feu tricolore.



- 1) Déterminer les équations horaires $x_1(t)$ et $x_2(t)$ de la voiture et du motard respectivement.
- 2) Déterminer les instants des dépassements ainsi que les positions de la voiture et du motard à ces instants.